

# Дискретка. Неофициальный конспект

Лектор: Светлана Александровна Пузынина

Конспектировал Леонид Данилевич

I семестр, осень 2022 г.

# Оглавление

<b>1 Булевы функции</b>	<b>3</b>
1.1 Введение в булевы функции . . . . .	3
1.1.1 Примеры . . . . .	3
1.1.2 Основные эквивалентности . . . . .	4
1.1.3 Базис . . . . .	4
1.2 Способы задания булевых функций . . . . .	4
1.2.1 Таблица истинности . . . . .	4
1.2.2 Дизъюнктивная нормальная формула . . . . .	5
1.2.3 Конъюнктивная нормальная формула . . . . .	5
1.2.4 Многочлен Жегалкина . . . . .	6
1.3 Замкнутые классы . . . . .	6
1.3.1 Примеры замкнутых классов . . . . .	6
1.4 Теорема Поста . . . . .	7
<b>2 Комбинаторика, выборки, числа Каталана</b>	<b>9</b>
2.1 Выборки . . . . .	9
2.1.1 Треугольник Паскаля . . . . .	10
2.1.2 Бином Ньютона . . . . .	10
2.1.3 Оценки на факториал . . . . .	10
2.1.4 Асимптотические оценки . . . . .	10
2.2 Числа Каталана . . . . .	11
2.2.1 Числа Каталана через монотонные пути . . . . .	11
2.2.2 Другие комбинаторные объекты . . . . .	12
<b>3 Графы</b>	<b>13</b>
3.1 Вступление . . . . .	13
3.1.1 Формально . . . . .	13
3.1.2 Факты . . . . .	14
3.1.3 Пути . . . . .	14
3.2 Эйлеровы и Гамильтоновы пути и циклы . . . . .	14
3.2.1 Эйлеров путь . . . . .	14
3.2.2 Гамильтонов цикл . . . . .	16
3.3 Деревья . . . . .	16
3.4 Изоморфность . . . . .	17
3.5 Планарные и плоские графы . . . . .	17
3.5.1 Двойственные графы . . . . .	18
3.5.2 Теорема о художественной галерее . . . . .	19
3.6 Раскраски графов . . . . .	21
3.7 Паросочетания . . . . .	23
3.7.1 Паросочетания в графах общего вида . . . . .	23
3.7.2 Устойчивое паросочетание . . . . .	25
3.8 Связность и разделяющие множества . . . . .	26
3.9 Рёберные раскраски . . . . .	27
3.9.1 Классы графа по отношению к теореме Визинга . . . . .	29

3.10 Теория Рамсея . . . . .	29
3.10.1 Числа Рамсея . . . . .	29
3.10.2 Числа ван дер Вардена . . . . .	32

# Глава 1

## Булевы функции

### Лекция I 1 сентября 2022 г.

#### 1.1 Введение в булевы функции

*Нотация:*

Ниже я пишу  $f(g(x_i))$ , где  $f$  — некая булева функция,  $g$  — булева функция одной переменной, имея в виду  $f(g(x_1), g(x_2), \dots, g(x_n))$ , где  $n$  — количество переменных, принимаемых  $f$ .

$!$  — логическое отрицание.  $(x = y)$  — функция равенства — равна 1  $\iff x = y$ .

$f_?$  по умолчанию имеет  $n$  переменных.

---

**Определение 1.1.1** (Булева функция). Функция  $f : \{0; 1\}^n \rightarrow \{0; 1\}$

#### 1.1.1 Примеры

Бывает удобно интерпретировать 0 как ложь, 1 — как истину. А именно, по этой причине основные функции имеют следующие названия:

- **Конъюнкция (логическое «И»)** — результат истинен, если и один, и другой аргументы истинны. Обозначается  $x \wedge y$ , или  $x @ y$ , или  $x \& y$  или  $xy$  (без знака, как умножение (на деле  $\wedge$  — действительно умножение, умножение в  $\mathbb{F}_2$ )).

$$x \wedge y = 1 \stackrel{\text{def}}{\iff} x = 1 \text{ и } y = 1$$

- **Дизъюнкция (логическое «ИЛИ»)** — результат истинен, если один, или другой аргумент истинен. Обозначается  $x \vee y$ , или  $x | y$ .

$$x \vee y = 1 \stackrel{\text{def}}{\iff} x = 1 \text{ или } y = 1 \text{ (или и то, и то)}$$

- **Импликация (логическое «следует»).** Предположим, нам известно, что из  $x$  следует  $y$ . Тогда результат импликации истинен, если возможна ситуация, когда  $x$  имеет истинность  $a$ , в то время как  $y$  имеет истинность  $b$ . Обозначается  $x \Rightarrow y$ , или  $x \rightarrow y$ .

$$x \rightarrow y = 1 \stackrel{\text{def}}{\iff} x = 0 \text{ или } y = 1 \text{ (или и то, и то)}$$

- *Симметрическая разность (логическое «либо-либо»)* — результат истинен, если либо один, **либо** другой аргумент истинен. Обозначается  $x \oplus y$ , или  $x \neq y$ .

$$x \oplus y = 1 \stackrel{\text{def}}{\iff} x \neq y$$

- *Отрицание (логическое «не»)* — результат истинен, если аргумент ложен. Обозначается  $\neg x$ , или  $\neg\neg x$ .

$$\neg x = 1 \stackrel{\text{def}}{\iff} x = 0$$

### 1.1.2 Основные эквивалентности

Истинность любой не слишком большой булевой формулы можно проверить перебором — две функции равны, если их результат совпадает на любом наборе значений.

- $\neg\neg x = x$
- $x \Rightarrow y = \neg x \vee y$
- $x \Rightarrow y = \neg y \Rightarrow \neg x$
- $x \vee y = y \vee x$  — коммутативность дизъюнкции
- $x \wedge y = y \wedge x$  — коммутативность конъюнкции
- $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$  — ассоциативность дизъюнкции
- $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$  — ассоциативность конъюнкции
- $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$  — дистрибутивность дизъюнкции относительно конъюнкции
- $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$  — дистрибутивность конъюнкции относительно дизъюнкции
- $\neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y$  — закон де Моргана
- $\neg(x \wedge y) = \neg x \vee \neg y$  — закон де Моргана

### 1.1.3 Базис

**Определение 1.1.2** (Базис). Некоторое подмножество булевых функций  $\mathcal{F}$ .

**Определение 1.1.3** (Формула над базисом  $\mathcal{F}$ ). Определение по индукции: Во-первых (база), всякая функция  $f \in \mathcal{F}$  является формулой над  $\mathcal{F}$ . Во-вторых (переход), для  $\Phi_1, \dots, \Phi_n$ , каждая из которых — либо формула над базисом  $\mathcal{F}$ , либо переменная, формула  $f(\Phi_1, \dots, \Phi_n)$ , где  $f \in \mathcal{F}$  — функция, принимающая  $n$  аргументов, является формулой над  $\mathcal{F}$ .

Так,  $(x \vee y) \wedge y$  — формула над базисом  $\{\wedge, \vee\}$ .

## 1.2 Способы задания булевых функций

### 1.2.1 Таблица истинности

Булеву функцию можно задать таблицей истинности: Если хочется, то строчки в таблице можно

x	y	$x \wedge y$	$x \vee y$	$x \Rightarrow y$	$x \oplus y$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	1
1	1	1	1	1	0

упорядочить в лексикографическом порядке (смотрим на первое различие, сравниваем там), как в таблицах выше. Тогда для описания функции достаточно только результатов, для  $2^n$  возможных значений  $n$  переменных. Это называется задание *булевым вектором*, например, булев вектор функции логического «И» — это 0001.

**Факт 1.2.1.** Если все наборы  $(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$  пронумеровать в лексикографическом порядке, то номер очередного набора — его дешифровка, как числа в двоичной системе счисления. Так, номер набора  $(0, 1, 0, 1, 1)$  — это  $01011_2 = 11_{10}$ . Это же можно записать в виде  $\sum_{i=1}^n \sigma_i 2^{n-i}$ .

### 1.2.2 Дизъюнктивная нормальная формула

Будем обозначать  $x^\sigma = \begin{cases} x, & \sigma = 1 \\ \neg x, & \sigma = 0 \end{cases}$

**Определение 1.2.1** (Простая конъюнкция). Конъюнкция нескольких переменных, возможно, с отрицаниями. Каждая переменная встречается не более одного раза.

**Определение 1.2.2** (Дизъюнктивная нормальная форма, ДНФ). Представление булевой формулы в виде дизъюнкции простых конъюнкций.

Так,  $(x \wedge \neg y) \vee z$  — дизъюнктивная нормальная форма.

**Определение 1.2.3** (Совершенная дизъюнктивная нормальная форма, СДНФ). Дизъюнктивная нормальная форма, в каждой конъюнкции которой — все переменные данной формулы. Ещё можно потребовать, чтобы все конъюнкции были различны.

*Замечание.* У любой формулы есть совершенная дизъюнктивная нормальная форма; её можно построить по таблице истинности.

А именно: для всякого набора переменных  $(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$  такого, что при данных значениях переменных результат функции истинен, добавить в текущую СДНФ (изначально пустую) конъюнкцию  $(x_1^{\sigma_1} \wedge \dots \wedge x_n^{\sigma_n})$ .

Таким образом, СДНФ равна

$$\bigvee_{f(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = 1} (x_1^{\sigma_1} \wedge \dots \wedge x_n^{\sigma_n})$$

Несложно убедиться, что данная СДНФ описывает именно данную булеву формулу.

### 1.2.3 Конъюнктивная нормальная формула

**Определение 1.2.4** (Простая дизъюнкция). Дизъюнкция нескольких переменных, возможно, с отрицаниями. Каждая переменная встречается не более одного раза.

**Определение 1.2.5** (Конъюнктивная нормальная форма, КНФ). Представление булевой формулы в виде конъюнкции простых дизъюнкций.

Так,  $(x \wedge \neg y) \vee z$  — конъюнктивная нормальная форма.

**Определение 1.2.6** (Совершенная конъюнктивная нормальная форма, СКНФ). Конъюнктивная нормальная форма, в каждой дизъюнкции которой — все переменные данной формулы. Ещё можно потребовать, чтобы все дизъюнкции были различны.

*Замечание.* У любой формулы есть совершенная конъюнктивная нормальная форма; её можно построить по таблице истинности.

А именно: для всякого набора переменных  $(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$  такого, что при данных значениях переменных результат функции ложен, добавить в текущую СКНФ (изначально пустую) дизъюнкцию  $(x_1^{\neg\sigma_1} \vee \dots \vee x_n^{\neg\sigma_n})$ .

Таким образом, СКНФ равна

$$\bigwedge_{f(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = 0} (x_1^{\neg\sigma_1} \vee \dots \vee x_n^{\neg\sigma_n})$$

Несложно убедиться, что данная СДНФ описывает именно данную булеву формулу.

#### 1.2.4 Многочлен Жегалкина

Взаимоисключающее «или» конъюнкций (допускается слагаемое 1) без повторений слагаемых.

Ещё его можно описать, как обычный многочлен над  $\mathbb{F}_2$ .

Так,  $f(x, y, z) = 1 \oplus x \oplus (x \wedge y \wedge z)$  — многочлен Жегалкина. Иногда константу 0 не считают многочленом Жегалкина, но это что-то странное.

**Теорема 1.2.1.** Всякая функция имеет единственное представление многочленом Жегалкина

*Доказательство.*

- Существование: заметим, что  $x \vee y = x \oplus y \oplus (x \wedge y)$ . Ещё заметим, что  $\neg x = (x \oplus 1)$ . Наконец заметим дистрибутивность  $\oplus$  относительно  $\wedge$  —  $(x \oplus y) \wedge z = (x \wedge z) \oplus (y \wedge z)$ , «можно раскрывать скобки».

Таким образом можно преобразовать ДНФ данной формулы, получив многочлен Жегалкина — одинаковые слагаемые сокращаются, так как  $x \oplus x = 0$ .

- Единственность: применим количественный аргумент. Всего многочленов Жегалкина  $2^{2^n}$  — всякая конъюнкция может либо встретиться, либо нет. Но булевых функций столько же.  $\square$

### 1.3 Замкнутые классы

Рассмотрим множество булевых формул  $\mathcal{F}$ .

**Определение 1.3.1** (Замыкание  $\mathcal{F}$ ). Множество всех булевых функций, представимых формулами над  $\mathcal{F}$ . Обозначают  $[\mathcal{F}]$ .

Так,  $[\emptyset] = \emptyset$ ;  $[\neg] = \{\text{id}, \neg\}$ ,  $[\vee] = \{x_1 \vee \dots \vee x_n \mid n > 1\}$ . Пояснение к последнему примеру:  $\vee$  — функция двух аргументов, логическое «ИЛИ». Замыкание класса, состоящего из этой функции, равно функции логического «ИЛИ» многих (хотя бы двух) переменных.

**Определение 1.3.2** (Замкнутый класс). Класс, равный своему замыканию.

#### 1.3.1 Примеры замкнутых классов

- $T_0$  — класс функций, сохраняющий 0.

$$f \in T_0 \iff f(0, \dots, 0) = 0$$

Так,  $\wedge, \vee, \oplus, 0$  сохраняют 0 (0 — функция, возвращающая ноль при любых значениях аргумента; тождественный ноль).

- $T_1$  — класс функций, сохраняющий 1.

$$f \in T_1 \iff f(1, \dots, 1) = 1$$

Так,  $\wedge, \vee, 1$  сохраняют 1 (1 — функция, возвращающая единицу при любых значениях аргумента; тождественная единица).

- **Определение 1.3.3** (Двойственная функция к  $f$ ).  $f^*(x_1, \dots, x_n) = \neg f(\neg x_1, \dots, \neg x_n)$

Так,  $\wedge$  и  $\vee$  двойственны друг другу.

**Определение 1.3.4** (Самодвойственная функция  $f$ ). Функция, двойственная сама себе:  $f^* = f$ .

Так,  $\neg$  самодвойственна.

Класс самодвойственных функций  $S$  замкнут.

*Доказательство.* Для доказательства достаточно убедиться, что все одноэтажные формулы  $(f(\Phi_1, \dots, \Phi_n))$ , где  $\Phi_i$  — либо функция из  $S$ , либо переменная) над  $S$  самодвойственны.

Тогда, строя формулу над  $S$  по индукции, можно убедиться, что на каждом шаге будет самодвойственная функция.

Утверждение проверяется так: самодвойственная функция — функция, при замене истинности всех аргументов которой меняется результат. Но тогда при замене истинности всех аргументов  $\Phi_i$  на противоположную, истинность  $\Phi_i$  тоже изменится (если это переменная — как истинность переменной, иначе — как самодвойственная функция). Отсюда и истинность  $f(\Phi_1, \dots, \Phi_n)$ , где  $\Phi_i$  сменится на противоположную.  $\square$

- Введём частичный порядок на множестве двоичных наборов:  $((x_1, \dots, x_n) \leq (y_1, \dots, y_n)) \iff \forall i : (x_i \leq y_i)$ .

**Определение 1.3.5** (Монотонная функция).  $f : \forall \alpha, \beta \in \{0, 1\}^n : (\alpha \leq \beta \Rightarrow f(\alpha) \leq f(\beta))$ .

Иными словами, при изменении какого-то аргумента с лжи на истину, значение функции не может поменяться в обратную сторону. Так,  $\vee$  и  $\wedge$  — монотонны, а  $\neg, \oplus, \Rightarrow$  — нет.

Класс монотонных функций  $M$  замкнут.

*Доказательство.* Аналогично, убедимся, что все одноэтажные формулы  $(f(\Phi_1, \dots, \Phi_n))$ , где  $\Phi_i$  — либо функция из  $M$ , либо переменная) над  $M$  монотонны.

Тогда, строя формулу над  $M$  по индукции, можно убедиться, что на каждом шаге будет монотонная функция.

Несложно видеть, что при замене аргумента со лжи на истину, истинность  $\Phi_i$  не поменяется в обратную сторону, откуда и истинность  $f(\Phi_1, \dots, \Phi_n)$  не поменяется в обратную сторону.  $\square$

- **Определение 1.3.6** (Линейная функция). Функция, многочлен Жегалкина которой не использует нетривиальные (с хотя бы двумя переменными) конъюнкции.

Иными словами,  $\oplus$  нескольких переменных, и, возможно, 1.

Класс линейных функций  $L$  замкнут.

*Доказательство.* Аналогично, убедимся, что все одноэтажные формулы  $(f(\Phi_1, \dots, \Phi_n))$ , где  $\Phi_i$  — либо функция из  $L$ , либо переменная) над  $L$  монотонны.

Тогда, строя формулу над  $L$  по индукции, можно убедиться, что на каждом шаге будет линейная функция.

Для доказательства просто заметим, что  $\oplus$  ассоциативен, коммутативен, и прочая, и прочая, откуда можно просто раскрыть скобки и получить опять же линейную функцию.  $\square$

## Лекция II

5 сентября 2022 г.

### 1.4 Теорема Поста

**Теорема 1.4.1** (Пост, 1921). Множество булевых функций  $\mathcal{F}$  является полной системой  $\iff \mathcal{F}$  не содержится ни в одном из пяти классов  $T_0, T_1, M, S, L$ .

*Доказательство.*

$\Rightarrow$ . Если  $\mathcal{F} \subset A$  для некоего  $A \in \{T_0, T_1, S, M, L\}$ , то  $[\mathcal{F}] = A$  и  $A \neq U$

- $\Leftarrow$ . 1. Рассмотрим  $f_0 \notin T_0$ . Тогда  $f(0) = 1$ . Если  $f(1) = 1$ , то  $f(x) = 1$  и нами получена константа 1. Иначе  $f(1) = 0$ , то  $f(x) = !x$ , и нами получено отрицание.

Аналогично для  $f_1 \notin T_1$  мы получаем либо константу 0, либо отрицание.

Покамест нами получены либо обе константы, либо отрицание, либо и то, и то (из константы и отрицания получается и другая константа тоже).

2. Пусть получено отрицание; получим константы. Рассмотрим  $f_S \notin S$ . Для некоего набора  $\{\sigma_i\}$  верно  $f_S(\sigma_i) = f_S(\neg\sigma_i)$ . Тогда рассмотрим  $f_S(x = \sigma_i)$  для некой переменной  $x$ .

$\forall x \in \{0, 1\}$  ( $x = \sigma_i \in \{\sigma_i, !\sigma_i\}$ ), откуда  $f_S(x = \sigma_i)$  не зависит от  $x$ ; это константа. С помощью отрицания получаем другую константу.

3. Пусть нами получены константы; получим отрицание. Рассмотрим  $f_M \notin M$ . Существуют два набора переменных  $\{\alpha_i\}, \{\beta_i\} : \alpha < \beta$ , однако  $f_M(\alpha_i) = 1 \wedge f_M(\beta_i) = 0$ .

Пусть  $I = \{i \in \mathbb{N} | \alpha_i \neq \beta_i\}, M_1 = \{i \in \mathbb{N} | \alpha_i = 1 = \beta_i\}, M_0 = \{i \in \mathbb{N} | \alpha_i = 0 = \beta_i\}$ . Очевидно  $I \sqcup M_1 \sqcup M_0 = \{i \in N | 1 \leq i \leq n\}$ .

Тогда  $f_M \begin{pmatrix} 1, & i \in M_1, \\ 0, & i \in M_0, \\ x, & i \in I \end{pmatrix} = !x$ . Мы получили отрицание.

4. Выразим конъюнкцию ( $\wedge$ ) из  $f_L \notin L$ . Рассмотрим представление  $f_L$  через многочлен Жегалкина. В нём существует нетривиальная конъюнкция, имеющая хотя бы две переменные. Пусть они  $x_j, x_k$ . Несложно видеть, что всегда многочлен Жегалкина разбивается следующим образом:

$$f_L(x_i) = (x_j \wedge x_k \wedge P(\dots)) \oplus (x_j \wedge Q(\dots)) \oplus (x_k \oplus R(\dots)) \oplus S(\dots)$$

Здесь  $P, Q, R, S$  — булевы функции  $n - 2$  переменных.  $P$  не является константой 0.

Для некоего  $\{\alpha_i\}_{i=1}^{n-2} : P(\alpha_i) = 1$ . Подставив  $x = x_j, y = x_k$ , остальные  $x = \alpha$  мы получим  $f_L(x_i) = (x \wedge y) \oplus (x \wedge a) \oplus (y \wedge b) \oplus c$  для неких  $a, b, c \in \{0, 1\}$ . Тогда подставив вместо  $x, y$  пару  $x \oplus b, y \oplus a$ , мы получим

$$((x \oplus b) \wedge (y \oplus a)) \oplus ((x \oplus b) \wedge a) \oplus ((y \oplus a) \wedge b) \oplus c = (x \wedge y) \oplus (a \wedge b) \oplus c$$

Отсюда возможным отрицанием получаем чистую конъюнкцию.

Мы выразили константы, отрицание, конъюнкцию, значит, мы выразили базис.  $\square$

## Глава 2

# Комбинаторика, выборки, числа Каталана

### 2.1 Выборки

Пусть дано некое множество элементов  $A$ .

Выборки — некие наборы  $M$ , такие, что  $\text{set}(M) \subset A$ . Выборки бывают *упорядоченными* ( $M$  — упорядоченный массив) и *неупорядоченными* ( $M$  — (мульти)множество), с *повторениями* (в  $M$  возможны одинаковые элементы) и *без повторений* (все элементы в  $M$  уникальны).

Правила суммы и произведения я пропущу.

Формулы:

	Упорядоченные	Неупорядоченные
С повторениями	$n^k$	$\widehat{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = \binom{n+k-1}{k}$
Без повторений	Размещения $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$	Сочетания $C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$

Предлагается выводить формулу  $\widehat{C}_n^k = \binom{n+k-1}{k}$  из бинарного вектора, а именно:

*Доказательство.*

- $\widehat{C}_n^k$  равно числу решений уравнения в неотрицательных числах  $\sum_{i=1}^n x_i = k$ .
- Закодируем некоторое решение  $\{x_i\}_{1 \leq i \leq n}$  двоичным вектором, где число  $x_i$  кодируется  $x_i$  единицами, а между числами стоит 0. Заметим, что существует биекция всех двоичных строк длины  $n+k-1$  с  $k$  единицами на решения вышеприведённого уравнения.
- Но таких строк  $\binom{n+k-1}{k}$

□

Теорема.  $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ .

*Доказательство.*  $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} = \frac{(n-1)!k}{k!(n-k)!} + \frac{(n-1)!(n-k)}{k!(n-k)!} = \frac{(n-1)! \cdot n}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$

□

## 2.1.1 Треугольник Паскаля

Извините, он у меня не треугольник

1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6
1	3	6	10	15	21
1	4	10	20	35	...
1	5	15	35	...	...
1	6	21	...	...	...

## 2.1.2 Бином Ньютона

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^i b^{n-i}.$$

*Доказательство.* Раскроем скобки. В итоговой сумме все слагаемые  $a^k b^l$  удовлетворяют тождеству  $k + l = n$ ; количество способов выбрать  $k$  раз  $a$ , а остальные разы —  $b$  — равно  $\binom{n}{k}$   $\square$

## 2.1.3 Оценки на факториал

Для  $n > 1$

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < n^n$$

Правое очевидно, докажем левое неравенство по индукции.

*Доказательство.* База:  $n = 1$ ,  $\left(\frac{1}{e}\right)^1 < 1$ , верно. Переход: Пусть  $\left(\frac{n}{e}\right)^n < n!$ . Докажем, что  $\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1} < (n+1)!$ .

Домножим обе части индукционного неравенства на  $(n+1)$ .  $(n+1) \left(\frac{n}{e}\right)^n < (n+1)!$ . Покажем, что  $(n+1) \left(\frac{n}{e}\right)^n > \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}$ , или же  $-e \cdot n^n > (n+1)^n$ . Это верно, так как  $e > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ , что мы узнаем в курсе матанализа. Отсюда переход верен и индукция верна.

$\square$

## 2.1.4 Асимптотические оценки

$f(n) = o(g(n))$  по определению означает  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$ .  $f(n) = o(1) \iff \lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = 0$ .

### Формула Стирлинга

$$n! = (1 + o(1)) \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Доказательство будет в курсе матанализа.

Лекция III  
12 сентября 2022 г.

## 2.2 Числа Каталана

**Определение 2.2.1** (Язык Дика). Определён над алфавитом  $\{(., )\}$  (в такой нотации  $.$  — разделитель между символами). Правильной скобочной последовательностью ПСП называется

пустая строка  $\varepsilon$ ,

( $u$ ) для строки над языком Дика  $u$ ,

$uv$ , для строк  $u$  и  $v$  над этим языком.

**Определение 2.2.2** (Числа Каталана). Числом Каталана  $D_n$  называется количество строк над языком Дика длины  $2n$ .

<http://oeis.org/A000108>

**Теорема 2.2.1** (Рекурсивная формула для чисел Каталана).  $D_n = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ \sum_{k=0}^{n-1} D_k D_{n-1-k}, & n > 0 \end{cases}$

*Доказательство.* База очевидна.

Рассмотрим произвольную непустую ПСП  $w$ . Она начинается с символа  $($ . Найдём парную ей скобку и назовём строку между скобками  $u$ , а строку после закрывающейся скобки  $v$ . Тогда  $w = (u)v$ . Заметим, что любая пара  $(u, v)$  подходящих длин подходит. Формула отсюда очевидна.  $\square$

### 2.2.1 Числа Каталана через монотонные пути

Пусть дан квадрат  $[0; n] \times [0; n]$ . Назовём монотонным путём длины  $n$  конечную последовательность длины  $2n + 1$ , состоящую из точек  $(x_i, y_i)$ , таких, что  $(x_1, y_1) = (0, 0)$ ;  $(x_{2n+1}, y_{2n+1}) = (n, n)$ ;  $\forall i : 0 \leq i \leq 2n : (x_{i+1}, y_{i+1}) =$

$$\begin{cases} (x_i + 1, y_i) — \text{горизонтальный переход} \\ (x_i, y_i + 1) — \text{вертикальный переход} \end{cases}$$

Дополнительным условием на «правильные» монотонные пути поставим  $\forall i : x_i \geq y_i$ . Это обозначает, что все точки пути лежат ниже или на прямой  $y = x$ .

**Факт 2.2.1.** Для  $\forall$  префикса ПСП  $s$ : количество (не меньше количества) на этом префиксе. Доказывается по индукции.

Этот факт показывает возможность биекции монотонных путей длины  $2n + 1$  и ПСП длины  $2n \dots$

**Теорема 2.2.2.** Аналитическая формула для чисел Каталана

$$D_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

*Доказательство.* Рассмотрим аналогичный путь, в котором все  $y_i$  уменьшены на 1. Тогда в новом пути  $y_i < x_i \forall i$ . Посчитаем количество путей из  $(0; -1)$  в  $(n; n - 1)$  как общее число монотонных путей за вычетом тех путей, у которых присутствует точка  $(x_i, y_i) : x_i \geq y_i$ .

Общее число путей очевидно  $\binom{2n}{n}$  — среди  $2n$  переходов выбрать  $n$  горизонтальных.

Очевидно, что в каждом неправильном пути с  $\exists (x_i, y_i) : x_i \geq y_i$  присутствует точка  $(a; a)$  для некоего  $a$ . Пусть  $a$  — первая точка пересечения пути с прямой  $y = x$ . Тогда отразим первую половину пути до  $a$  от прямой  $y = x$  и получим путь из  $(-1; 0)$  в  $(n; n - 1)$ . Заметим, что существует биекция между неправильными путями (пересекающими  $y = x$ ) из  $(0, 0)$  в  $(n; n)$  и путями из  $(0; -1)$  в  $(n - 1; n)$ , а последних  $\binom{2n}{n-1}$  — в каждом таком пути  $n + 1$  горизонтальный переход и  $n - 1$  вертикальный. // todo: нарисовать картинку

$$D_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} = \frac{(2n)!}{n!n!} - \frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!} = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

$\square$

**Теорема 2.2.3** (Асимптотика чисел Каталана).  $D_n = (1 + o(1)) \frac{4^n}{n^{\frac{3}{2}} \sqrt{\pi}}$ .

*Доказательство.* Использование формулы Стирлинга. □

### **2.2.2 Другие комбинаторные объекты**

Есть очень много разумных комбинаторных объектов, количество которых для данного размера — число Каталана.

# Глава 3

## Графы

### 3.1 Вступление

Графическое представление — вершины — точки, рёбра — линии.

Морально — объекты и связи между ними.

История про Кенигсбергские мосты — можно ли обойти все мосты, пройдя ровно по разу через каждый из мостов?

todo: прикрепить картинку. Данный граф — мультиграф, так как присутствуют кратные рёбра, то есть некоторые вершины связаны дважды. Эйлеров обход графа — путь, проходящий по каждому ребру графа ровно один раз.

История про 3 дома, 3 колодца и тропинки между каждой парой разнотипных объектов — является ли граф  $K_{3,3}$  планарным? Можно ли граф  $K_{3,3}$  расположить на плоскости, чтобы кривые, соответствующие рёбрам, не пересекались?

История про знакомых юношей и девушек в деревне, требуется сыграть максимальное количество свадеб между знакомыми парами — нахождение максимального паросочетания в двудольном графе.

История о раскраске карты, чтобы граничащие по области ненулевой длины государства — односвязные множества плоскости — имели разный цвет. Минимальное количество цветов для раскраски? (Максимальное хроматическое число планарных графов). Вообще задача о раскраске графа — нахождении хроматического числа.

#### 3.1.1 Формально

Формально  $(V; E)$ , где  $V$  — как правило конечное множество вершин, любое множество;  $E \subset V \times V$ .

Граф можно задать квадратной матрицей смежности  $a_{i,j}$  порядка  $|V|$ :

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1, & (i, j) \in E \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}.$$

**Определение 3.1.1** ((Не)ориентированный граф).  $(u, v) \in E \iff (v, u) \in E$ . Иначе граф называется ориентированным.

**Определение 3.1.2** (Мультиграф). Мультиграф задаётся матрицей смежности, здесь  $a_{i,j} \in \mathbb{N}$ .

**Определение 3.1.3.** Смежные вершины — для неориентированного графа

Вершины  $u, v$  — смежные, если  $(u, v) \in E$ .

**Определение 3.1.4** (Инцидентные вершина и ребро). Ребро  $(u, v)$  и вершина  $u$  для некоего  $v$ .

**Определение 3.1.5** (Петля). Ребро  $(u, u)$  для некоего  $u$ .

**Определение 3.1.6** (Степень вершины  $v$  :  $\deg(v)$ ).  $\deg(v) = \sum\{a_{v,u} | u \in V\} + a_{v,v}$ . Иначе говоря, количество рёбер, инцидентных  $v$ , где петли считаются дважды. В ориентированных графах выделяют *исходящую* и *входящую* степени.

### 3.1.2 Факты

**Факт 3.1.1.** В неориентированном графе сумма степеней всех вершин равна удвоенному числу рёбер.

**Факт 3.1.2.** В ориентированном графе сумма входящих степеней равна сумме исходящих степеней.

**Факт 3.1.3.** Всякий конечный граф содержит чётное число вершин нечётной степени.

### 3.1.3 Пути

**Определение 3.1.7** (Путь). Конечная последовательность  $a_i$  нечётной длины  $2k+1$ .  $a_i \in \begin{cases} V, & 2 \nmid i \\ E, & 2 \mid i \end{cases}$

Необходимое требование на путь:  $\forall i \in \{2, 4, \dots, 2k\}$ :  $a_i$  — ребро между  $a_{i-1}$  и  $a_{i+1}$ .

Различные вершины в пути  $\Rightarrow$  вершинно-простой путь.

Различные рёбра в пути  $\Rightarrow$  рёберно-простой путь.

Цикл — путь с  $a_1 = a_{2k+1}$ . Цикл простой, если все его вершины, кроме  $a_{2k+1}$  различны.

Цикл — рёберно-простой, если соответствующий путь рёберно-простой.

**Факт 3.1.4.** Если существует путь, соединяющий  $u$  и  $v$ , то существует и простой путь, соединяющий  $u$  и  $v$ .

**Определение 3.1.8** (Связанные вершины). Две вершины  $u$  и  $v$  называются связанными, если существуют пути из  $u$  в  $v$  и из  $v$  в  $u$ . (В неориентированных графах очевидно достаточно существования одного, любого, пути). (В ориентированных графах наличие одного пути влечёт не сильную, обычную для ориентированных графов, связность, а так называемую слабую связность).

**Факт 3.1.5.** Связанность — отношение эквивалентности

**Определение 3.1.9** (Компоненты связности). Классы эквивалентности для отношения связанности. В ориентированном случае называются компонентами сильной связности.

Граф *связный*, если в нём ровно одна (хотя бы одна) компонента связности. В ориентированном случае граф сильно связный.

**Лемма 3.1.1.** Компонента связности — связный граф

*Доказательство.* Докажем для любых вершин компоненты  $u$  и  $v$ , что существует путь между ними, использующий только вершины из данной компоненты. Так как  $u$  и  $v$  в одной компоненте связности, то существует путь в исходном графе между ними. Но все промежуточные вершины по определению связаны с  $u$  и  $v$ , поэтому этот путь — в компоненте связности.  $\square$

## Лекция IV

15 сентября 2022 г.

## 3.2 Эйлеровы и Гамильтоновы пути и циклы

### 3.2.1 Эйлеров путь

**Определение 3.2.1** (Эйлеров путь). Рёберно-простой путь, содержащий все рёбра графа.

**Определение 3.2.2** (Эйлеров цикл). Эйлеров путь, являющийся циклом.

**Теорема 3.2.1.** Связный граф содержит эйлеров цикл  $\iff$  все вершины в нём имеют чётную степень. Связный граф содержит эйлеров путь  $\iff$  все вершины, кроме быть может ровно двух, в нём имеют чётную степень.

*Доказательство.*

$\Rightarrow$ . Очевидно

$\Leftarrow$ . Индукция по числу рёбер. Индукционное предположение — верность сразу обоих предположений, и про пути, и про циклы.

Пусть верно для всех графов с  $\leq n$  рёбрами. Рассмотрим граф с  $n + 1$  ребром.

- Рассмотрим две вершины нечётной степени. Найдём между ними простой путь и удалим его. Граф, возможно, распадётся на компоненты связности, в каждой все степени вершин чётны. Значит, по предположению, во всех компонентах есть эйлеровы циклы (во всех компонентах рёбер не больше  $n$ ).

Для воссоздания эйлерового пути будем двигаться по найденному пути. Встречая вершину из необойдённой компоненты, обходим по эйлеровому циклу её компоненту, после чего продолжаем движение по пути.

- Если все вершины чётной степени, то будем удалять не путь, а цикл, всё аналогично. Формально — упражнение читателю.  $\square$

**Теорема 3.2.2.** Сильно связный ориентированный граф содержит эйлеров цикл  $\iff$  каждая его вершина имеет равные степени захода и исхода. Для эйлерового пути — все вершины таковы, кроме быть может двух, для которых одна имеет степень захода на 1 больше степени исхода, а другая — на 1 меньше.

**Определение 3.2.3** (Граф де Брейна (de Bruijn) порядка  $n$  для  $k$ -символьного алфавита  $\Sigma$ ). Множество вершин  $V = \Sigma^n$

Множество рёбер: у каждой вершины есть  $k$  исходящих дуг. Слово из букв  $w_1w_2\dots w_n$  имеет  $i$ -ю ( $1 \leq i \leq k$ ) из инцидентных дуг с вторым концом  $w_2w_3\dots w_n\Sigma_i$ , здесь  $\Sigma_i$  —  $i$ -й символ алфавита.

Иначе говоря, ориентированная дуга  $(u, v)$  есть  $\iff u[1; n] = v[0; n - 1]$  для 0-индексированных строк. Здесь  $s[i; j]$  означает подстроку строки  $s$  с  $i$ -го символа включительно по  $j$ -й невключительно.

**Теорема 3.2.3.** В графе де Брейна есть эйлеров цикл.

*Доказательство.* В каждой вершине и входящая, и исходящая степень равны  $k$ .  $\square$

**Следствие 3.2.1.** Существует строка над алфавитом  $\Sigma$  длины  $k^{n+1} + n$ , у которой все подстроки длины  $n + 1$  различны; их множество совпадает с множеством всех строк длины  $n + 1$  над алфавитом  $\Sigma$ .

Так, для  $n = 2, k = 2$  в графе де Брейна  $k^n = 4$  вершин и  $k^{n+1} = 8$  рёбер. Существует строка длины  $k^{n+1} + n = 10$ , содержащая все строки длины  $n + 1 = 3$  над двухсимвольным алфавитом по разу.

Алгоритм построения строки де Брейна:

1. записывается произвольная начальная строка  $w_0$ .
2. находится эйлеров цикл.
3. Начиная с  $w_0$  производится движение по циклу, символы, соответствующие посещённым рёбрам, дописываются в конец строки.

//todo: нарисовать картинку.

### 3.2.2 Гамильтонов цикл

**Определение 3.2.4** (Гамильтонов цикл). Простой цикл в графе называется гамильтоновым, если он проходит через каждую вершину ровно один раз.

*Замечание.* Вероятно, не существует полиномиального алгоритма о поиске гамильтонова цикла.  $NP$ -полнная задача, никто, вероятно, не знает, существует ли алгоритм.

Достаточное условие существования гамильтонова цикла:

**Теорема 3.2.4** (Дирак, 1952). В графе  $G = (V, E) : |V| \geq 3$  существует гамильтонов путь (цикл), если сумма степеней любых двух вершин хотя бы  $n - 1$  ( $n$ )

*Доказательство.*

**Лемма 3.2.1.** В графе с  $|V| = k \geq 3$  с гамильтоновым путём сумма степеней концов вершин хотя бы  $k$ . Тогда в графе существует гамильтонов цикл.

*Доказательство леммы.* Пусть гамильтонов путь в данном графе содержит вершины в порядке следования  $\{A_i\}_{1 \leq i \leq k}$ . Пусть  $adj_i$  — множество вершин, смежных с  $i$ -й. Если существуют вершины  $u \in adj_1, v \in adj_k : u + 1 = v$ , то существует понятный гамильтонов цикл

$1, 2, \dots, u - 1, u, k, k - 1, \dots, v + 1, v, 1$ . //todo: нарисовать картинку. Иначе  $|adj_1| + |adj_k| < k$ , противоречие.  $\square$

Из леммы понятно, что достаточно доказать для пути. Рассмотрим самый длинный в данном графе простой путь  $P$ . Предположим, что он не гамильтонов:  $|P| = k < n$ . Рассмотрим подграф  $H = (set(P), \{(u, v) \in E | u, v \in set(P)\})$ , где  $set(P)$  — множество вершин в пути. По предположению не существует рёбер из концов пути во внешний граф — в любую из вершин  $V \setminus set(P)$ . Тогда в графе  $H$  по лемме существует гамильтонов цикл, так как  $n - 1 \geq k$ .

Но цикл практически всегда можно удлиннить: если цикл проходит по вершинам  $\{A_i\}_{1 \leq i \leq k}$ , то любое ребро вида  $(a_i, b)$  при условии  $b \notin A$  можно добавить, как первое ребро нового пути. Получаем противоречие, так как мы нашли более длинный путь.

Если же такого ребра не существует, то степени всех вершин пути не больше  $k - 1$ , а степени остальных вершин не больше  $n - 1 - k$ . Противоречие с суммой степеней.  $\square$

## 3.3 Деревья

**Определение 3.3.1** (Дерево). Связный граф без циклов

**Определение 3.3.2** (Лес). Граф без циклов

**Определение 3.3.3** (Ориентированное дерево). орграф (ориентированный граф) без циклов, в котором ровно одна вершина имеет степень захода 0, а остальные — степень захода 1. Здесь вершина с нулевой степенью захода называется *корень дерева*, а вершины с нулевой степенью исхода — *листьев*.

**Определение 3.3.4** (Мост). Ребро, удаление которого увеличивает число компонент связности графа.

**Теорема 3.3.1** (Теорема о мостах). Ребро является мостом  $\iff$  оно не принадлежит ни одному (простому) циклу.

*Доказательство.*  $\Rightarrow$  (Мост  $\Rightarrow$  не принадлежит циклам). От противного — пусть ребро содержится в цикле. Покажем, что связность вершин  $u$  и  $v$  не зависит от наличия данного ребра. В самом деле, если путь не  $u - v$  не содержал это ребро, то он остался. Если пути между  $u$  и  $v$  не существовало, то он не появился. Иначе путь между  $u$  и  $v$  проходил по данному ребру, но тогда ребро можно обойти по остальным рёбрам цикла, содержащего ребро, противоречие.

$\Leftarrow$  (Не принадлежит циклам  $\Rightarrow$  мост). Изначально концы ребра  $x$  и  $y$  были в одной компоненте связности. От противного — пусть после удаления ребра они остались в одной компоненте связности. Тогда существует путь между  $x$  и  $y$ , не содержащий данное ребро. Значит, после добавления ребра получится цикл, противоречие.

//todo: нарисовать картинку

□

**Теорема 3.3.2.** Следующие утверждения для (простого) графа равносильны:

1.  $G$  — дерево
2.  $\forall u, v \in V$  : существует ровно один простой путь из  $u$  в  $v$ .
3.  $G$  не содержит циклов, но при добавлении любого несуществующего ребра теряет это свойство.
4.  $G$  — связный граф и  $|E| = |V| - 1$ .
5.  $G$  не содержит циклов и  $|E| = |V| - 1$ .
6.  $G$  — связный граф и каждое ребро является мостом.

**Определение 3.3.5** ( $H$  — оставочный подграф  $G$ ).  $V_H = V_G; E_H \subset E_G$ .

**Определение 3.3.6** (Оставное дерево). Оставочный подграф, являющийся деревом.

**Факт 3.3.1.** Всякий связный граф содержит оставное дерево.

**Доказательство.** Пока в  $G$  есть ребро, содержащееся в цикле, удалим его. Это не мост, граф останется связным.

Теперь в  $G$  нет циклов. Значит, это дерево.

□

**Следствие 3.3.1.** Связный граф с  $n$  вершинами содержит хотя бы  $n - 1$  ребро.

**Определение 3.3.7** ( $H$  — индуцированный подграф  $G$ ).  $V_H \subset V_G; E_H = \{(u, v) \in E_G | u, v \in V_H\}$ .

## 3.4 Изоморфность

**Определение 3.4.1** (Графы  $G_1$  и  $G_2$  изоморфны). Существует биекция  $f : V_1 \rightarrow V_2 : \forall u, v \in V_1 : ((u, v) \in E_1 \iff (f(u), f(v)) \in E_2)$ .

**Факт 3.4.1.** Проверка двух графов на изоморфность —  $NP$ -трудная задача.

**Лекция V**  
19 сентября 2022 г.

## 3.5 Планарные и плоские графы

**Определение 3.5.1** (Плоский граф). Граф, существует укладка которого на плоскость, то есть существует отображение из вершин графа в точки плоскости, а из рёбер — в кривые, с концами — образами вершин, инцидентных ребру, причём кривые не должны пересекаться. Формальнее, рёбра можно отображать в ломаные с конечным числом звеньев.

В сигнатуру плоского графа входит ещё множество областей, на которые образы рёбер разбивают плоскость — граней. Неограниченная область тоже является гранью (называется внешней гранью).  $G = (V, E, F)$ .

**Определение 3.5.2** (Планарный граф). Граф, изоморфный некоему плоскому графу.

**Замечание.** Плоский граф знает своё расположение на плоскости, а планарный граф — нет.

**Факт 3.5.1.** Граф плоский /планарный  $\Rightarrow$  существует укладка графа на сфере.

// Доказательство получается из стереографической проекции.

### 3.5.1 Двойственные графы

Пусть дан плоский связный мультиграф  $G = (V, E, F)$ .

**Определение 3.5.3** (Граф, двойственный  $G$ ). Новый плоский граф  $H$ . Грани графа  $G \rightarrow$  вершины графа  $H$ . В графе  $H$  существует ребро между новыми вершинами, если в графе  $G$  прообразы вершин — грани — имели общую границу ненулевой длины.

**Факт 3.5.2.** Для плоского графа  $G$  граф  $G^*$  — тоже плоский;  $(G^*)^* = G$ . Я пропустил, было ли доказательство...

*Замечание.* Изоморфные плоские графы могут иметь неизоморфные графы, двойственные им. Так, например, графы «бамбук длины 3» и «солнышко с тремя листьями» имеют изоморфные двойственные им графы. //todo: нарисовать картинку.

**Теорема 3.5.1** (Эйлер, 1758). Во всяком плоском связном графе  $|V| - |E| + |F| = 2$ .

*Замечание.* Для укладки не на плоскость, а на сферу с  $k$  ручками выполняется  $|V| - |E| + |F| = 2 - 2k$ . Доказательства и даже точной формулировки, увы и ах, не будет...

*Доказательство случая для плоскости.* Индукция по числу граней  $|F|$ .

База:  $|F| = 1 \Rightarrow$  граф без циклов. Из связности следует, что это дерево, значит, действительно  $|V| - |E| = 1$ .

Переход: Пусть  $|F| \geq 2$ . Удалим какое-нибудь ребро, входящее в цикл. Ребро, входящее в цикл, разделяло две грани, образы которых в двойственном графе были смежны.

После удаления ребра количество и рёбер, и граней уменьшилось ровно на 1. Итак,  $(V, E, F) \mapsto (V', E', F')$ :  $|V'| = |V|$ ;  $|E'| = |E| - 1$ ;  $|F'| = |F| - 1$ , и мы можем воспользоваться индукционным предположением.  $\square$

**Следствие 3.5.1.** В планарном графе без петель и кратных рёбер  $G = (V, E)$ :  $|E| \leq \frac{l}{l-2}(|V| - 2)$ . Здесь за  $l$  обозначается длина наименьшего цикла в графе.

*Доказательство.* Заметим, что  $|F| \leq \frac{2}{l}|E|$ , так как каждой грани соответствует не менее  $l$  рёбер, а каждому ребру — ровно 2 грани. Подставив в формулу Эйлера, получим  $|E| = |V| + |F| - 2 \Rightarrow \left(1 - \frac{2}{l}\right)|E| \geq |V| - 2$ , откуда выражается требуемое.

$\square$

**Следствие 3.5.2.** Во всяком планарном графе без петель и кратных рёбер есть вершина степени не более, чем 5.

*Доказательство.* От противного: пусть степень любой вершины хотя бы 6. Тогда несложно получить  $|E| \geq 3|V|$ , это противоречит предыдущему следствию.  $\square$

**Следствие 3.5.3.** Графы  $K_{3,3}$  (полный двудольный граф, размер каждой доли 3) и  $K_5$  (полный граф на 5 вершинах) не являются планарными.

**Теорема 3.5.2.** Граф  $G$  планарен  $\iff$  любой его подграф не гомеоморден ни графу  $K_5$ , ни графу  $K_{3,3}$ .

**Определение 3.5.4** (Операция разбиения ребра  $e$  в неориентированном графе  $G$ ). Удаление ребра  $e$ , создание новой вершины  $w$ , добавление в граф двух рёбер  $(u, w)$  и  $(v, w)$ , где  $e = (u, v)$ .

**Определение 3.5.5** (Гомеоморфные графы). Графы  $G_1$  и  $G_2$  гомеоморфны, если, применив к *каждому* из них произвольное количество раз операцию разбиения ребра, можно получить изоморфные графы.

*Замечание.* В одну сторону доказательство очевидное — если существует и укладка, и подграф, гомеоморфный запретному  $K_5$  или  $K_{3,3}$ , то из укладки для данного графа можно извлечь укладку для  $K_5$  или  $K_{3,3}$ , что приводит к противоречию.

### 3.5.2 Теорема о художественной галерее

Пусть дан произвольный  $n$ -угольник. Требуется расставить минимальное количество «сторожей» — точек внутри многоугольника, чтобы всякая точка многоугольника была обозреваема каким-либо сторожем — существовал отрезок из «сторожа» в данную точку, не выходящий за пределы многоугольника.

*Замечание.* Для выпуклого многоугольника достаточно одного «сторожа» — в любой точке данного многоугольника.

**Теорема 3.5.3** (Хватал, 1975). Для любого  $n \geq 3$  достаточно  $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$  сторожей в некоторых его вершинах.

*Доказательство.* Нижняя оценка — гребёнка Хватала. Для  $n = 3k$  необходимо минимум  $k$  «сторожей» в некоем специфическом многоугольнике, называемом «гребёнка Хватала». //todo: добавить картинку.

**Лемма 3.5.1.** *Всякий многоугольник разбиваем диагоналями на треугольники. Граф с вершинами, совпадающими с вершинами многоугольника, и рёбрами, соответствующими диагоналям / сторонам, раскрашиваем в 3 цвета.*

*Доказательство.* По индукции.

База:  $n = 3$ . Треугольник разбит и раскрашиваем.

Переход:  $n \geq 4$ . Пусть  $\angle A_{i-1}A_iA_{i+1} < 180^\circ$ . Такой угол есть, например, в качестве точки  $A_i$  можно взять крайнюю в каком-то направлении.

- Пусть отрезок  $A_{i-1}A_{i+1}$  лежит внутри многоугольника. Тогда применим индукционное предположение для многоугольника  $A_1 \dots A_{i-1}A_{i+1}A_{|A|}$  — многоугольника  $A$  с выкинутой вершиной  $A_i$ , после чего покрасим  $A_i$  в подходящий цвет (запрещены всего 2 цвета, цвета смежных с ней вершин).
- Пусть отрезок  $A_{i-1}A_{i+1}$  не лежит внутри многоугольника. Тогда треугольник  $A_{i-1}A_iA_{i+1}$  содержит некие вершины многоугольника. Сопоставим каждой такой вершине прямую, проходящую через неё, и параллельную  $A_{i-1}A_{i+1}$ . Возьмём среди всех вершин ту, у которой соответствующая прямая ближе всего к точке  $A_i$ , пусть это точка  $A_j$ . Утверждение: отрезок  $A_iA_j$  лежит внутри многоугольника. // нарисовать картинку. Тогда применим индукционное предположение для половинок и склеим их. написать подробнее

□

По лемме строим разбиение многоугольника на треугольники, красим вершины в 3 цвета. Выбираем среди трёх цветов вершин тот, который используется нестрого реже (не чаще) остальных цветов. Ему соответствует  $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$  вершин. Расставим сторожей именно в этих вершинах. Тогда каждый треугольник из триангуляции обозреваем. □

**Теорема 3.5.4** (Фари, 1948). Для любого планарного графа существует отображение на плоскость, такое, что рёбра переходят в отрезки

## Лекция VI

26 сентября 2022 г.

*Доказательство.* Докажем, что существует преобразование произвольной укладки в укладку, где рёбрам соответствуют отрезки, сохраняющее множество граней.

Добавим в граф рёбра, пока все грани не станут треугольниками. Для жизнеспособности доказательства удалим добавленные рёбра после построения укладки.

**Лемма 3.5.2** (О триангуляции). *Пусть  $G$  — планарный граф без петель и кратных рёбер. Тогда существует триангуляция  $T$  — плоский граф, каждая грань в котором — треугольник (с возможно кривыми рёбрами), в котором  $G$  содержится, как остаточный подграф.*

*Доказательство леммы.*

Так как  $G$  — без петель и кратных рёбер, то существует грань  $f$ , на границе которой больше 3 вершин.

- Грань  $f$  имеет связную границу.

Рассмотрим граф  $H$ , индуцированный на множестве вершин грани  $f$ . Он не является кликой\*, можно добавить ребро (в  $H$  могут быть рёбра между несоседними вершинами  $f$ , проведённые вне  $f$ ).

\* — при  $|V_H| \geq 5$   $H$  содержит индуцированный  $K_5$ , не являющийся планарным. Иначе  $|V_H| = 4$  и надо разобрать случаи:

1. Граница — треугольник и ребро вовнутрь. Тогда есть висячая вершина, можем провести ребро
  2. Граница — четырёхугольник. Не могут без пересечений вне него быть проведены всевозможные рёбра.
- Граница грани  $f$  несвязна. Тогда она содержит вершины из хотя бы двух компонент связности, можем соединить любые две из разных компонент.

В таком процессе на каждом шагу увеличивается количество рёбер, но мы поддерживаем граф простым; значит, если шаг возможен, то граф ещё не полный — можно добавить ребро. Иначе доказательство завершено за конечное число шагов.  $\square$

Индукция по числу вершин.

База:  $|V| = 3$  — можем нарисовать подходящий треугольник.

Шаг индукции: В планарном графе есть вершина  $v : \deg v \leq 5$ . Докажем, что есть такая, не лежащая на внешней грани.

От противного: пусть у всех  $|V| - 3$  вершин не на внешней грани степень хотя бы 6. Тогда сумма степеней всех вершин (внешняя грань связана с внутренностью, значит, на ней есть вершина степени хотя бы 3)  $\sum_v \deg(v) \geq 6(|V| - 3) + 3 + 2 + 2 = 6|V| - 11 > 6|V| - 12$ , но мы знаем, что  $2|E| \leq 6|V| - 12$ . Противоречие.

Рассмотрим такую вершину  $v$ . Из неё исходит  $\deg v$  рёбер,  $\deg v$  граней, примыкающих к (*содержащих*)  $v$  являются треугольниками. Значит,  $v$  лежит внутри некоего (не-более-чем-пяти)угольника.  $\deg v \geq 3$ , так как все грани являются треугольниками.

Применим индуктивное предположение теоремы Фари к графу  $G$  без вершины  $v$  и инцидентных её рёбер.

Дальше по теореме Хватала во всяком пятиугольнике есть вершина, которая «обозревает» весь пятиугольник. Расположим удалённую вершину  $v$  в данной точке.  $\square$

## 3.6 Раскраски графов

**Определение 3.6.1** (Раскраска графа). Раскраска графа цветами из множества  $C$  — функция  $f : V \rightarrow C$ .

**Определение 3.6.2** (Правильная раскраска графа). Такая функция, что  $(u, v) \in E \Rightarrow f(u) \neq f(v)$ . Я пишу граф красится в  $k$  цветов  $\equiv$  существует правильная раскраска при  $|C| \leq k$ .

1. Двудольный граф красится в два цвета.
2. Полный граф на  $n$  вершинах не красится в менее чем  $n$  цветов.

**Теорема 3.6.1** (Хивуд). Всякий планарный граф красится в 5 цветов.

*Доказательство.*

Индукция по числу вершин.

База:  $|V| \leq 5$ ,  $f = \text{id}$ .

Шаг индукции: рассмотрим вершину минимальной степени  $v$ . Удалим её и покрасим остальной граф. Дальше её надо добавить, сохранив правильность раскраски.

Если  $\deg v \leq 4$ , то её можно покрасить в тот цвет, которым не покрашен ни один из соседей  $v$  — смежных с ней вершин.

Если  $\deg v = 5$ , то рассмотрим соседей вершины и пронумеруем их в порядке укладки на плоскости:  $\{v_i\}_{i \in \{1,2,3,4,5\}}$ . Добавим каждое ребро в случае его отсутствия — между  $v_i$  и  $v_j$  если  $i+1 \equiv_5 j$ . Какой-то из диагонали  $(v_i, v_j)$  нет для  $i+2 \equiv_5 j$ , так как  $K_5$  непланарен.

**Определение 3.6.3** (Склейка вершин в графе  $G/uv$ ). Отождествление вершин  $u$  и  $v$ . В новом графе есть ребро, если между любыми прообразами концов данного ребра есть хотя бы одно ребро.

Склейм такие вершины  $v_i$  и  $v_j$ , а ещё вершину саму  $v$ . Раскрасим склеенный граф, дальше  $v_i$  и  $v_j$  оставим такого цвета, а  $v$  покрасим в какой-то пятый цвет, не совпадающий с цветом ни одного из её соседей.  $\square$

*Интересный факт* (Аппель, Хакен, 1977). Всякий планарный граф красится в 4 цвета. Доказательство использует компьютерный перебор — первое в истории такое доказательство.

**Определение 3.6.4** (Хроматическое число графа  $G$ ). Минимальное число цветов, в которое красится граф  $G$ . Обозначается  $\chi(G)$ .

В частности, хроматическое число любого планарного графа не больше 4.

**Определение 3.6.5** ( $k$ -дольный граф). Граф с хроматическим числом  $k$

**Факт 3.6.1.** Граф двудольный  $\iff$  он не содержит циклов нечётной длины.

**Лемма 3.6.1.** Если граф  $H$  не красится в  $k$  цветов, то он содержит индуцированный подграф, в котором степени всех вершин хотя бы  $k$ .

*Доказательство.* Удалим вершину  $v$ :  $\deg v < k$ . Покрасим граф и вернём её обратно. Нельзя покрасить, если и только если остался граф, где степени всех вершин  $\geq k$ .  $\square$

**Следствие 3.6.1.** Пусть вершины  $v_1, \dots, v_n$  графа  $G$  пронумерованы так, что любая вершина  $v_k$  имеет не более  $d$  соседей среди вершин  $v_1, \dots, v_{k-1}$ . Тогда граф красится в  $d+1$  цвет.

*Доказательство.* От противного: применим лемму, в индуцированном подграфе вершина с максимальным номером имеет степень не более  $d$ , противоречие.  $\square$

**Теорема 3.6.2** (Брукс, 1941). В графе  $G$  степени всех вершин  $\leq d$ . Для  $d \geq 3$ : если ни одна из компонент связности  $G$  не является полным графом, то  $\chi(G) \leq d$ .

*Доказательство.*

Решаем для каждой компоненты связности независимо, предполагаем  $G$  связным.

Пусть  $u, v$  — несмежные вершины графа  $G$ . Рассмотрим следующие графы:

- $G/uv$  — склейка  $G$  по вершинам  $u$  и  $v$ .
- $G + (u, v)$  — граф с добавленным ребром  $(u, v)$ .

Заметим, что если  $G$  красится в  $k$  цветов, то и хотя бы один из данных двух графов красится в  $k$  цветов. (Рассмотреть случаи  $u$  и  $v$  одного цвета, либо разных)

От противного: возьмём граф при наименьшем  $|V|$ , такой, что он не красится в  $d$  цветов. По лемме в нём есть индуцированный подграф, где все вершины степени хотя бы  $d$ . Взяли минимальный граф, значит, в индуцированный подграф совпадает с ним самим, все вершины степени хотя бы  $d$ .

Рассмотрим любую вершину  $p$  степени  $d$ , у неё есть два соседа, несмежных между собой, так как  $G \neq K_{d+1}$ . Тогда так как  $G$  не красился, то и  $G/uv$  равно как и  $G + (u, v)$  не красятся в  $d$  цветов.

$G/uv$ :

- Не красится в  $d$  цветов
- Граф связен
- $\deg p < d; \forall w \in V : w \neq uv : \deg w \leq d$ .
- В  $G/uv$  по лемме есть индуцированный подграф, содержащий вершину  $uv$  (иначе есть меньший контрпример), который не красится в  $d$  цветов. Он не содержит вершину  $p$ , так как её степень меньше  $d$ .
- Все вершины степени  $d$  в данном подграфе не имеют рёбер вовне, так как их степень в графе  $G$  равна  $d$ . Единственной вершиной, могущей иметь рёбра вовне, является  $uv$ .

$G + (u, v)$ :

- Определим  $H'$  как тот индуцированный подграф из  $G/uv$ , который мы нашли, только в  $H'$  вершины  $u$  и  $v$  расклёны. Проведём в графе  $H'$  ребро  $(u, v)$ .
- Определим  $\tilde{H}$  — индуцированный на  $(V_G \setminus V_{H'}) \cup \{u, v\}$  вершинах граф. В нём также проведём ребро  $(u, v)$ .
- $H' \cap \tilde{H} = (u, v)$ .
- Цель — покрасить  $\tilde{H}$  и  $H'$  в  $d$  цветов каждый. Тогда склеивая эти раскраски по ребру мы получим раскраску графа  $G$ .
- Докажем, что все вершины в  $\tilde{H}$  имеют степень не больше  $d$ . Для этого достаточно проверить, что  $\exists w_u \in V_{H'} : (u, w_u) \in E$ . И для  $v$  надо найти аналогичную  $w_v$ . Но если бы для  $u$  или  $v$  таких рёбер не было, то в  $H'$  все степени были бы не больше  $d$ , противоречие с минимальностью графа.

Тогда для  $H'$  и  $\tilde{H}$  выполняется утверждение теоремы, но раз граф  $G$  не красится, то  $H' = K_{d-1} \vee \tilde{H} = K_{d-1}$ . Но в  $H'$  вершины  $u$  и  $v$  не имеют общих соседей; в  $\tilde{H}$  тоже что-то не так (пойму позже)  $\square$

# Лекция VII

3 октября 2022 г.

## 3.7 Паросочетания

**Определение 3.7.1** (Паросочетание). Подмножество рёбер  $M \subseteq E$ , такое, что все рёбра не имеют общих концов. *Совершенное паросочетание* — паросочетание, в котором участвуют все вершины.

**Теорема 3.7.1** (Холл, 1935). В двудольном графе  $(G, V_1, V_2)$  существует паросочетание, покрывающее  $V_1 \iff \forall U \subset V_1 : (\bigcup_{u \in U} \text{adj}_u) \geq |U|$ , где  $\text{adj}_u$  — множество вершин, смежных с  $u$ . Очевидно, что для  $u \in V_1 : \text{adj}_u \subset V_2$ .

*Доказательство.*

$\Rightarrow$  очевидно: если есть паросочетание, насыщающее  $V_1$ , то  $(\bigcup_{u \in U} \text{adj}_u) \subset (\bigcup_{u \in U} \{\text{pair}_u\}) = |U|$ , где  $\text{pair}_u$  — соответствующая  $u$  вершина в паросочетании.

$\Leftarrow$  Докажем по индукции, по числу вершин в левой доле  $|V_1|$ .

Предположим, что  $\exists U_1 \subsetneq V_1 : (\bigcup_{u \in U_1} \{\text{adj}_u\}) = |U_1|$ .

Для  $U_1$  выполняется предположение индукции, есть паросочетание в подграфе, индуцированном на  $U_1 \cup (\bigcup_{u \in U_1} \{\text{adj}_u\})$ . По условию теоремы  $W = V_1 \setminus U_1 : (\bigcup_{u \in (U_1 \cup W)} \{\text{pair}_u\}) \geq |V_1| - |U_1|$ . Так как  $(\bigcup_{u \in W} \{\text{adj}_u\}) \cap (\bigcup_{u \in U_1} \{\text{adj}_u\}) = \emptyset$ , то  $(\bigcup_{u \in W} \{\text{adj}_u\}) \geq |W|$  и по предположению индукции есть паросочетание, насыщающее и  $W$  тоже.

Иначе  $\forall U \subset V_1 : (\bigcup_{u \in U} \text{adj}_u) > |U|$ . Будем удалять из графа рёбра, пока это верно. В какой-то момент наступит равенство, и можно будет применить предыдущее решение.

□

### 3.7.1 Паросочетания в графах общего вида

Назовём компоненту связности *нечётной*, если в ней нечётное количество вершин. Для  $U \subset V_G$  обозначим  $G \setminus U$  — индуцированный на  $V \setminus U$  подграф.

**Теорема 3.7.2** (Татт, 1947). В графе  $G(V, E)$  есть совершенное паросочетание  $\iff \forall U \subset V : \text{odd}(G \setminus U) \leq |U|$ , где  $\text{odd}(H)$  — количество нечётных компонент связности в  $H$ .

В частности, для  $U = \emptyset : \text{odd}(G) = 0$ , то есть  $G$  состоит из нескольких компонент связности из чётного количества вершин.

*Доказательство.*

$\Rightarrow$  В графе существует паросочетание  $\Rightarrow$  все компоненты связности чётного размера. После удаления  $|U|$  вершин станет не более  $|U|$  нечётных компонент связности, так как нечётными могли стать только компоненты, содержащие  $\text{pair}_u$  для  $u \in U$ .

$\Leftarrow$  Предположим, что совершенного паросочетания нет. Рассмотрим  $\widehat{G} = (V, \widehat{E})$  — такой граф, где  $E \subset \widehat{E}$ , и  $\widehat{E}$  — максимально по размеру, и таково, что совершенного паросочетания всё ещё нет. Иначе говоря, докинем рёбер, пока можно.

Покажем, что на деле в  $\widehat{G}$  есть совершенное паросочетание.

Положим  $U = \{v \in V \mid \deg_{\widehat{G}} v = |V| - 1\}$  — множество вершин, связанных со всеми в новом графе  $\widehat{G}$ . Не исключено, что  $U = \emptyset$ .

**Предложение 3.7.1.** В графе  $\widehat{G} \setminus U$  всякая компонента связности — полный граф.

*Доказательство.* От противного: пусть есть  $C$  — компонента связности в  $\widehat{G} \setminus U$ , не являющаяся полным графом. Тогда  $\exists u, v, w \in C : ((u, w) \in \widehat{E}) \wedge ((v, w) \in \widehat{E}) \wedge ((u, v) \notin \widehat{E})$ . (Это упражнение читателю, верно для любой компоненты связности, не являющейся полным графом).

Так как  $w \notin U$ , то  $\exists p \in V_1 : (p, w) \notin \widehat{E}$ . По построению  $\widehat{G}$  при добавлении ребра  $(p, w)$  появится совершенное паросочетание  $M_1$ , а при добавлении ребра  $(u, v)$  появится совершенное паросочетание  $M_2$ . Посмотрим на рёбра из  $M_1 \cup M_2$ . Так как оба паросочетания совершенны, то каждой вершине инцидентны по два ребра из  $M_1 \cup M_2$ , то есть рёбра формируют циклы чётной длины из чередующихся  $M_1$  и  $M_2$  рёбер и изолированные рёбра, принадлежащие  $M_1 \cap M_2$ .

Так как в  $\widehat{G}$  нет совершенного паросочетания, то  $(u, v)$  и  $(w, p)$  лежат в одном и том же цикле, образовавшемся на рёбрах  $M_1 \cup M_2$  — иначе можно перекомбинировать паросочетания  $M_1$  и  $M_2$  так, что появится совершенное паросочетание на  $\widehat{G}$ . Вспомним, что  $(w, u), (w, v) \in \widehat{E}$ . Можно заметить, что в таком случае паросочетания всё ещё можно перекомбинировать так, чтобы по-прежнему быть полным, но не использовать ни одно из рёбер  $(u, v)$  и  $(w, p)$ . Противоречие с определением  $\widehat{G}$   $\square$

Зная устройство графа  $\widehat{G}$ , несложно построить в нём совершенное паросочетание — чётные компоненты «замкнём» сами на себя, а к нечётным компонентам связности присоединим одну вершину из  $U$ . Это возможно, так как по условию  $|U| \geq \text{odd}(\widehat{G} \setminus U)$ .

$\square$

**Теорема 3.7.3** (Берж, 1958). Наименьшее число вершин, непокрытых паросочетанием, равно дефекту графа  $d(G) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{U \subset V} (\text{odd}(G \setminus U) - |U|)$ .

*Доказательство.*

- $\Rightarrow$ . Рассмотрим максимальное паросочетание  $M$ . Оно оставляет непокрытыми  $m$  вершин. Очевидно,  $\forall U \subset V : \text{odd}(G \setminus U) \leq |U| + m$ , так как в каждой нечётной компоненте связности должна быть либо непокрытая  $M$  вершина, либо непарная — с соседом в  $U$ . Неравенство перепишем как  $d(G) \leq m$  для любого паросочетания  $M$ .
- $\Leftarrow$ . Добавим в граф  $d(G)$  ( $d(G)$  — дефект графа) новых вершин  $\{v_1, \dots, v_{d(G)}\}$ , соединим каждую из них со всеми вершинами из  $V \setminus U$ . Покажем, что полученный граф  $G'$  удовлетворяет условию теоремы Татта, то есть содержит совершенное паросочетание. Для всякого  $U' \subset V \cup \{v_1, \dots, v_{d(G)}\}$  рассмотрим два случая:
  - $\{v_1, \dots, v_{d(G)}\} \setminus U' \neq \emptyset$ . В таком случае  $G' \setminus U'$  имеет ровно одну компоненту связности, для  $U' = \emptyset$  она ещё и чётная.
  - Иначе  $\{v_1, \dots, v_{d(G)}\} \subset U'$ . Тогда  $G' \setminus U' = G \setminus U$  для  $U = U' \setminus \{v_1, \dots, v_{d(G)}\}$ . Заметим, что  $|U| = |U'| - d(G)$ . Применив определение  $d(G) = \max_{U \subset V} (\text{odd}(G \setminus U) - |U|)$ , получаем, что  $d(G) \geq \text{odd}(G \setminus U) - |U| = \text{odd}(G' \setminus U') - (|U'| - d(G))$ , то есть  $|U'| \geq \text{odd}(G \setminus U)$ , что и требовалось.

Итак, в графе  $G'$  есть совершенное паросочетание. Выкинув вершины  $\{v_1, \dots, v_{d(G)}\}$  получаем в графе  $G$  паросочетание, оставляющее непокрытыми не более  $d(G)$  вершин. Но так как всякое паросочетание оставляет непокрытыми хотя бы  $d(G)$  вершин (см.  $\Rightarrow$ ), то  $d(G)$  в точности равно количеству вершин, оставленных непокрытыми максимальным паросочетанием.  $\square$

**Определение 3.7.2** ( $k$ -регулярный граф). Граф, степень каждой вершины которого равна  $k$ .

**Теорема 3.7.4** (Петерсон, 1981). Всякий 3-регулярный граф без мостов содержит совершенное паросочетание.

*Доказательство.* Применим теорему Татта. Для этого рассмотрим произвольное  $U \subset V$ . Утверждается, что нечётных компонент связности в  $G \setminus U$  не более  $|U|$ . Пусть этих компонент  $k$ . Посчитаем количество рёбер, соединяющих вершины из  $U$  и нечётные компоненты извне.

С одной стороны, их не больше, чем  $3|U|$  — сумма степеней вершин из  $U$ .

С другой стороны, их не меньше, чем  $3k$  — каждая нечётная компонента связности должна иметь хотя бы 3 ребра, соединяющих её и остальной граф. Этих рёбер должно быть нечётное число (следует из нечётности каждой степени вершины), а ещё больше одного, так как граф без мостов.

Отсюда  $k \leq |U|$ , и теорема Татта применима.  $\square$

## Лекция VIII

10 октября 2022 г.

### 3.7.2 Устойчивое паросочетание

Рассмотрим полный двудольный граф  $G(V_1, V_2, E)$ .

Зададим порядок  $<$  на множестве рёбер для каждой конкретной вершины  $v \in V_1 \cup V_2$ .

*Неформально говоря, считаем, что пара  $(u, v_1)$  предпочтительнее для  $u$ , чем пара  $(u, v_2)$ , если  $(u, v_1) <_u (u, v_2)$ .*

**Определение 3.7.3** (Устойчивое паросочетание  $M$ ). Паросочетание  $M$ , такое, что не существует ребра  $(v_1, v_2) \in E \setminus M$ , для которого выполнены каждое из двух условий:

- $(v_1, v_2) <_{v_1} (v_1, \text{pair}_{v_1})$
- $(v_2, v_1) <_{v_2} (v_2, \text{pair}_{v_2})$

**Теорема 3.7.5** (Гейл, Шепли, 1962). Во всяком полном двудольном графе  $G = (V_1, V_2, E)$ , для всяких предпочтений  $\{<_v\}_{v \in V_1 \cup V_2}$ ,  $|V_1| = |V_2|$  существует устойчивое паросочетание.

*Доказательство.*

Построим какое-то устойчивое паросочетание, запустив алгоритм:

Изначально паросочетание  $M$  пусто.

Заведём множество  $\{A_v\}_{v \in V_1} : A_v \subset V_2$ . Изначально  $\forall v \in V_1 : A_v = V_2$ , потом множества будут уменьшаться.

*Можно думать об  $A_v$ , как о множестве вершин из  $V_2 = \{v_{2,1}, v_{2,2}, \dots\}$  таких, что ранее данной стадии алгоритма  $v$  не было попытка провести ребро  $(v, v_{2,i})$ .*

Пока паросочетание  $M$  не максимальное по размеру, рассмотрим любую вершину  $v_1 \in V_1$ , не насыщенную паросочетанием. Рассмотрим ребро  $(v_1, u)$ , где  $u$  — наиболее предпочтительная для  $v_1$  вершина среди  $A_{v_1}$  и удалим вершину  $u$  из множества  $A_{v_1}$ ; проведём это ребро если и только если вершине  $u$  не инцидентно никакого ребра из текущего паросочетания, или же  $(u, v_1) <_u (u, \text{pair}_u)$ .

Алгоритм очевидно конечен (на каждом шаге  $\sum_v |A_v|$  уменьшается на 1), докажем его корректность:

Рассмотрим пару  $(v_1, v_2) \in E \setminus M$ . Если  $(v_1, \text{pair}_{v_1}) < (v_1, v_2)$ , то пара не является причиной неустойчивости. Иначе  $(v_1, \text{pair}_{v_1}) > (v_1, v_2)$  и в какой-то момент была попытка провести ребро  $(v_1, v_2)$ , но оказалась (раньше или позже) такая вершина  $v'_1$ , что  $(v'_1, v_2) < (v_1, v_2)$ . Тогда пара  $(v_1, v_2)$  тоже не является причиной неустойчивости.  $\square$

Свойства устойчивого паросочетания  $M_{GS}$  (ниже  $\text{pair}_x$  относится к паре  $x$  в данном паросочетании  $M_{GS}$ ), найденного данным алгоритмом:

- В  $K_{n,n}$  образуется максимальное по размеру паросочетание  $|M| = n$ , которое является совершенным.

- Паросочетание «самое хорошее» для каждой  $v_1 \in V_1$ : пара  $(v_1, \text{pair}_{v_1})$  среди всех устойчивых паросочетаний для  $v_1$  наиболее предпочтительная.

*Доказательство.*

Назовём пару  $(x, y)$  возможной, если  $\exists$  стабильное паросочетание, в котором данная пара входит в паросочетание.

Докажем от противного: пусть есть определённая возможная пара  $(x, y) \in V_1 \times V_2$  такая, что  $\nexists y' \in V_2 : (x, y') <_x (x, y)$ , для возможной пары  $(x, y')$ , но  $(x, y) \notin M_{GS}$ . Существует паросочетание  $M' \ni (x, y)$ .

Рассмотрим пары  $(x, \text{pair}_x) \in M$  и  $(x, y) \in M'$ . Пусть  $y'$  — пара  $\text{pair}_x$  в  $M'$ , то есть  $\exists y' : (\text{pair}_x, y') \in M'$ . Из работы алгоритма  $GS$  следует, что  $(\text{pair}_x, y') <_{y'} (x, \text{pair}_x)$  и получаем противоречие со стабильностью  $M_{GS}$ .  $\square$

- Паросочетание «самое плохое» для каждой  $v_2 \in V_2$ : пара  $(v_2, \text{pair}_{v_2})$  среди всех устойчивых паросочетаний для  $v_2$  наименее предпочтительная.

### 3.8 Связность и разделяющие множества

Рассмотрим граф  $G = (V, E)$ . Множество  $X \subset V$  назовём  $(V_1, V_2)$ -разделяющим, если в графе  $G \setminus X : \forall v_1 \in V_1 \setminus X; \forall v_2 \in V_2 \setminus X$  нет пути из  $v_1$  в  $v_2$ , то есть  $v_1$  и  $v_2$  лежат в разных компонентах связности.

**Теорема 3.8.1** (Геринг, 2000). Пусть  $V_1, V_2 \subset V; k \in \mathbb{N}$ . Тогда ровно одно из двух условий верно:

1.  $\exists U \subset V : |U| < k$  и  $U$  —  $(V_1, V_2)$ -разделяющее.
2. Существует по крайней мере  $k$  вершинно простых путей из  $V_1$  в  $V_2$ , попарно не имеющих общих вершин.

*Доказательство.*

- Если верно (2), то  $\neg(1)$  очевидно — надо удалить по крайней мере по одной вершине из каждого пути.
- Докажем импликацию  $\neg(1) \Rightarrow (2)$ .

По индукции:

База:  $k = |U| = 1$ , очевидна — из  $\neg(1)$  следует, что  $V_1$  и  $V_2$  не разделены пустым множеством, то есть  $\exists (v_1, v_2) \in V_1 \times V_2 : v_1$  и  $v_2$  соединены путём.

Переход: Пусть  $\exists V_1, V_2 \subset V$  такие, что  $\forall U \subset V : (U - (V_1, V_2)\text{-разделяющее}) \Rightarrow (|U| \geq k)$ . Будем считать, что  $|V_1 \cap V_2| < k$ , иначе  $k$  разделяющих путей уже нашлись — одновершинные.

Будем удалять рёбра из графа до тех пор, пока в новом графе противное предположение всё ещё верно.

Теперь при удалении любого ребра  $(x, y) \in E'$ : появляется  $(V_1, V_2)$ -разделяющее множество  $U : |U| < k$ . Отсюда видно, что до удаления  $(x, y)$  множество  $U \cup \{x\}$  — разделяющее, равно как и  $U \cup \{y\}$ .

- В случае  $\{U \cup \{x\}, U \cup \{y\}\} = \{V_1, V_2\}$  в качестве  $k$  путей можно взять  $k - 1$  одновершинных путей  $V_1 \cap V_2$ , а ещё ребро  $(x, y)$ .
- В случае  $U \cup \{x\} \notin \{V_1, V_2\}$  возьмём  $W = U \cup \{x\}$ . Иначе  $U \cup \{y\} \notin \{V_1, V_2\}$ , возьмём  $W = U \cup \{y\}$ . Теперь  $|W| = k$ , а ещё  $W \notin \{V_1, V_2\}$ , но  $W - (V_1, V_2)$  разделяющее.

$W$  — разделяющее  $\Rightarrow$  все пути от  $v \in V_1$  до  $w \in W$  не заходят в  $V_2$ . Рассмотрим граф  $G_1 = G \setminus (V_2 \setminus W)$ . Граф уменьшился, так как  $V_2 \setminus W \neq \emptyset$ . Любое  $(V_1, W)$ -разделяющее множество в новом графе является  $(V_1, W)$ -разделяющим и в старом, поскольку вершины

из  $V_2 \setminus W$  не лежат ни на каком пути из  $W$  в  $V_1$ . Следовательно, в любом  $(V_1, W)$ -разделяющем множестве хотя бы  $k$  вершин.

По предположению индукции для графа  $G_1$  имеется  $k$  непересекающихся путей из  $V_1$  в  $W$ .

Аналогичными рассуждениями есть  $k$  путей из  $V_2$  в  $W$ . Но  $|W| = k$ , значит, данные пути можно «склеить» и получить  $k$  путей из  $V_1$  в  $V_2$ .  $\square$

## Лекция IX

13 октября 2022 г.

**Теорема 3.8.2** (Менгер, 1927). Пусть дан граф  $G = (V, E)$ . Пусть  $a, b \in V$ . Тогда наименьшее число вершин  $(a, b)$ -разделяющего множества (не включающего ни  $a$ , ни  $b$ ) равно наибольшему числу непересекающихся по вершинам (за исключением  $a$  и  $b$ ) путей, соединяющих  $a$  и  $b$ .

*Доказательство.* Применить теорему Геринга к графу, индуцированному на  $V \setminus \{a, b\}$ , и применить к множествам соседей,  $\text{adj}_a$  и  $\text{adj}_b$ .  $\square$

**Определение 3.8.1** (Вершинное покрытие). Такое множество вершин, что каждое ребро содержит хотя бы одну из них (ребро рассматривается здесь, как множество инцидентных ей вершин).

**Теорема 3.8.3** (Кёниг, 1931). Наибольшее число рёбер в паросочетании двудольного графа  $G$  равно наименьшему числу вершин в вершинном покрытии.

*Доказательство.* Применим теорему Геринга к графу  $G$  и множествам, являющимся левой и правой долями. Наибольшее количество путей — наибольшее паросочетание. Наименьшее вершинное покрытие — наименьшее разделяющее множество.  $\square$

## 3.9 Рёберные раскраски

Для  $C$  — множества цветов

**Определение 3.9.1** (Рёберная раскраска). Отображение  $c : C \rightarrow E$ . Раскраска правильная, если  $c(e) \neq c(e')$  для всех смежных рёбер  $e$  и  $e'$ .

*Замечание.* Для любого цвета  $c \in C$  множество рёбер цвета  $c$  образует паросочетание.

**Теорема 3.9.1** (Кёниг, о раскраске рёбер). В двудольном графе  $G = (V_1, V_2, E)$  существует правильная раскраска рёбер в  $D$  цветов, где  $D = \max_{v \in V_1 \cup V_2} \deg v$ .

*Доказательство.* Необходимость очевидна — у вершины степени  $D$  все инцидентные рёбра должны быть разноцветными.

Достаточность: зафиксируем  $D$ .

Будем доказывать по индукции, перебирая графы по параметру  $d = \min_{v \in V_1 \cup V_2} \deg v$ .

- База:  $d = D$ ,  $D$ -регулярный граф.

Для данного графа выполняется условие леммы Холла:  $\forall U \subset V_1 \bigcup_{u \in U} \text{adj}_u \geq |U| \cdot \frac{|D|}{|D|}$ . Значит, есть совершенное паросочетание.

Удалим его (предварительно покрасив в цвет  $D$ ), останется  $D - 1$ -регулярный граф. В нём покрасим паросочетание в цвет  $D - 1$ . И так  $D$  раз.

- Переход:  $d < D$ . Пусть  $G' = (V'_1, V'_2, E')$  — копия  $G$ . Объединим  $G$  и  $G'$  в один граф  $G'' = (V_1 \cup V'_2, V_2 \cup V'_1, E \cup E' \cup E_0)$ , где  $E_0 = \{(v, v') \mid v \in V_1 \cup V_2 \wedge v' \in V'_1 \cup V'_2 \wedge \deg v = d\}$ .

В  $G''$  наибольшая степень вершины всё ещё  $D$ , а наименьшая —  $d + 1$ . По предположению индукции  $G''$  красится  $D$  цветов, значит, индуцированный на  $V_1 \cup V_2$  подграф  $G$  тоже красится в  $D$  цветов.

□

**Теорема 3.9.2** (Визинг, 1964). В произвольном графе существует раскраска рёбер в  $D + 1$  цвет, где  $D$  — наибольшая степень вершины.

*Доказательство.*

**Лемма 3.9.1.** *Рассмотрим граф  $G = (V, E)$ . Пусть  $v \in V$ . Тогда при условиях*

$$\deg v \leq k \wedge \forall u \in \text{adj}_v : (\deg u \leq k \wedge \#\{u \in \text{adj}_v \mid \deg u = k\} \leq 1)$$

*выполняется следующее: если рёбра графа  $G \setminus \{v\}$  можно покрасить в  $k$  цветов, то и рёбра графа  $G$  можно покрасить в  $k$  цветов.*

*Доказательство леммы.*

Индукция по  $k$ .

База:  $k = 1$ .  $v$  — либо изолированная вершина, либо инцидентна изолированному ребру.

Переход:  $m := \deg v$ ;  $\{u_1, \dots, u_m\} = \text{adj}_v$ , причём  $\deg u_1 \leq k$ ,  $\forall i = 2, \dots, m : \deg u_i < k$ .

Рассмотрим  $c$  — раскраску  $G' = G \setminus \{v\}$  в цвета  $\{1, \dots, k\}$ .

Добавим в граф  $G'$  новые рёбра от  $u_i$  до новых вершин так, чтобы выполнялись равенства

$$\deg u_i = \begin{cases} k, & i = 1 \\ k - 1, & i \geq 2 \end{cases}$$

Обозначим  $X_i = \{u \in \text{adj}_v \mid \text{В графе } G' \text{ вершине } u \text{ не инцидентно рёбер цвета } i\}$ .

Зная степени вершин  $u_1, \dots, u_m$  понимаем, что для  $u_1 \exists! j : u_1 \in X_j$ ; для  $u_i$  ( $i \geq 2$ ) :  $\exists! \{j_1, j_2\}, j_1 \neq j_2 : u_i \in X_{j_1} \wedge u_i \in X_{j_2}$ .

Тогда  $\sum_{i=1}^k |X_i| = 2 \deg v - 1 = 2m - 1 < 2k$ .

Пусть  $\exists i, j : |X_i| > |X_j| + 2$ . Рассмотрим подграф  $G'_{i,j}$  графа  $G'$ , образованный рёбрами цветов  $i$  и  $j$ . В  $G'_{i,j}$  всякая компонента связности — путь или чётный цикл с чередующимися рёбрами цвета  $i$  и  $j$ . Все вершины, кроме  $X_i \cap X_j$ , не являются изолированными в  $G'_{i,j}$ . Есть компонента связности в  $G'_{i,j}$ , в которой больше вершин из  $X_i$ , чем из  $X_j$ . Тогда это простой путь, начинающийся с ребра цвета  $j$  в вершине из  $X_i$ , и не заканчивающийся ребром цвета  $i$  в вершине из  $X_j$ . Поменяем в этом пути все вершины цвета  $i$  на вершины цвета  $j$  и наоборот. Одно такое перекрашивание увеличивает  $|X_j|$  на  $k$  и уменьшает  $|X_i|$  на  $k$ , где  $k$  — количество вершин из  $X_i$  на концах данного пути (1 или 2). Повторив это сколько надо раз, получим: теперь для всех  $i, j : ||X_i| - |X_j|| \leq 2$ .

Так как  $\sum_{i=1}^k |X_i|$  нечётна, то  $\exists i : |X_i| = 1$ , так как есть нечётный, меньший 2 (если все хотя бы 2, то сумма хотя бы  $2k$ ).

Отсюда получается, что есть цвет  $i : |X_i| = 1$ . Пусть  $X_i = \{\tilde{u}\}$ . Всякой другой вершине  $u_j \neq \tilde{u}$  инцидентно ребро цвета  $i$  в графе  $G'$ . Построим граф  $\tilde{G} = (V; \tilde{E})$ , где  $\tilde{E} = E \setminus (\{(v, \tilde{u})\} \cup \{\text{Рёбра цвета } i \text{ в графе } G'\})$ . В графе  $\tilde{G}$  степени  $v$  и всех её соседей уменьшились на единицу  $\Rightarrow$  так как  $\tilde{G} \setminus \{v\}$  красится в  $k - 1$  цвет (той же раскраской, что  $G'$  красится в  $k$  цветов), то применимо индукционное предположение.

А именно,  $\tilde{G}$  красится в  $k - 1$  цвет. Тогда вернём рёбра из  $E_G \setminus E_{\tilde{G}}$ , покрасив их в цвет  $k$ .  $\square$

Для графа  $G = (V, E)$  обозначим  $D = \max_{v \in V} \deg v$ . Пусть  $U \subset V$ . Докажем индукцией по  $|U|$ , что рёбра графа, индуцированного на  $U$ , красятся в  $D + 1$  цветов.

База:  $|U| = 1$ , рёбер нет, любая раскраска годится.

Переход: Пусть  $U = U' \sqcup \{v\}$ . По предположению индукции рёбра между вершинами из  $U'$  красятся в  $D$  цветов. Так как все степени вершин не превышают (на деле строго меньше)  $D + 1$ , то по лемме граф, индуцированный на  $U'$  тоже красится в  $D + 1$  цвет.  $\square$

### 3.9.1 Классы графа по отношению к теореме Визинга

- Графы, рёбра которых красятся в  $D \stackrel{\text{def}}{=} \max_{v \in V} \deg v$  цветов.

Некоторые из них перечислены ниже:

- Двудольные графы.
- Планарные графы при  $D \geq 7$ .
- Почти все случайные графы

- Графы, рёбра которых не красятся в  $D \stackrel{\text{def}}{=} \max_{v \in V} \deg v$  цветов. Однако, по теореме Визинга, они красятся в  $D + 1$  цвет. Некоторые из них перечислены ниже:

- Некоторые планарные графы для  $D \leq 5$ .

*Замечание.* Вопрос, существует ли планарный граф с максимальной степенью вершин  $D = 6$ , рёбра которого красятся только в  $D + 1$  цвет, является открытым.

*Замечание.* Алгоритм проверки, принадлежит ли данный граф первому классу, является  $NP$ -полном задачей.

## Лекция X

17 октября 2022 г.

### 3.10 Теория Рамсея

#### 3.10.1 Числа Рамсея

Поиск регулярной структуры в, казалось бы, хаотическом устройстве.

Так, в полном графе на шести вершинах есть либо треугольник, либо антитреугольник.

Рассмотрим гиперграф, в котором гиперрёбра соответствуют каждому множеству из  $k$  человек, всякое гиперребро может быть двух цветов (*знакомы-незнакомы*).

Рассмотрим множество  $M$  мощности  $N$ . Пусть есть произвольная покраска всех  $k$ -элементных подмножеств  $M$  в  $d$  цветов.

**Определение 3.10.1** (Свойство Рамсея).  $N$  обладает свойством Рамсея  $\mathcal{R}(k|m_1, \dots, m_d)$ , если для всякой раскраски  $M$  найдётся какое-то подмножество  $A \subset M$  такое, что все его  $k$ -элементные подмножества покрашены в один и тот же из  $k$  цветов (пусть это цвет  $c$ ), и ещё  $|A| = m_c$ .

**Определение 3.10.2** (Число Рамсея).  $R(k|m_1, \dots, m_d)$  — наименьшее натуральное число, удовлетворяющее свойству Рамсея  $\mathcal{R}(k|m_1, \dots, m_d)$ .

Пример:  $R(2; 3, 3) = 6$ . Можно проверить, например, полным перебором (проверить, что 6 обладает свойством  $\mathcal{R}(2|3, 3)$ , а все меньшие натуральные числа — нет).

**Теорема 3.10.1** (Рамсей, 1930).  $R(k; m_1, \dots, m_d)$  существует (и конечно) для данных параметров  $k, m_1, \dots, m_d$ .

*Доказательство.*

- Найдём явно  $R(1; m_1, \dots, m_d)$ . Здесь красятся одноэлементные подмножества. По принципу Дирихле  $\left(\sum_{i=1}^d m_i\right) - d + 1$  обладает свойством Рамселя  $\mathcal{R}(1|m_1, \dots, m_d)$ . С другой стороны, все меньшие числа не обладают свойством — контрпримером является  $m_i - 1$  вершин цвета  $i$  для  $\left(\sum_{i=1}^d m_i\right) - d$ , или сужение раскраски на меньшее множество.
- Если  $\min_{1 \leq i \leq d} m_i < k$ , то  $R(k; m_1, \dots, m_d) = \min_{1 \leq i \leq d} m_i$ . Достаточно выбрать подмножество мощности  $\min_{1 \leq i \leq d} m_i$ : в нём все  $k$ -элементные подмножества имеют необходимый цвет (так как их нет).
- Будем доказывать существование чисел Рамселя индукцией, в порядке лексикографического возрастания  $\left(k; \sum_{i=1}^d m_i\right)$ .

Считаем, что  $\min_{1 \leq i \leq d} m_i \geq k$ . Обозначим  $Q_i = R(k|m_1, \dots, m_i - 1, \dots, m_d)$ . Эти числа существуют по индукционному предположению.

Тогда утверждается, что  $R(1; m_1, \dots, m_d) \leq 1 + R(k-1|Q_1, \dots, Q_d)$ . Обозначим данную оценку сверху  $N := R(k-1|Q_1, \dots, Q_d)$ .

Покажем, что  $N$  обладает свойством Рамселя  $\mathcal{R}(k|m_1, \dots, m_d)$ : рассмотрим множество  $M_N = \{1, \dots, N\}$  и произвольную покраску его  $k$ -элементных подмножеств в  $d$  цветов. Построим другую покраску другого множества  $M_{N-1} \setminus \{1, \dots, N-1\}$ : красить теперь будем  $(k-1)$ -элементные подмножества. Подмножество  $A \subset M_{N-1}$  покрасим в тот же цвет, что и  $A \cup \{N\}$  покрашено в множестве  $M_N$ .

Но так как  $|M_{N-1}| = R(k|Q_1, \dots, Q_d)$ , то существует  $B \subset M_{N-1} : |B| = Q_i$ , в котором все  $(k-1)$ -элементные подмножества имеют цвет  $i$ . Но по определению  $Q_i = R(k|m_1, \dots, m_i - 1, \dots, m_d)$ . Значит, в  $B$  содержится, как подмножество

- либо для некоего  $j \in \{1, \dots, d\} \setminus \{i\}$  подмножество мощности  $m_j$ , все  $k$ -элементные подмножества которого имеют цвет  $j$ .
- либо подмножество мощности  $m_i - 1$ , все  $k$ -элементные подмножества которого имеют цвет  $i$ . Пусть оно  $C$ , тогда  $C \cup \{N\}$  таково, что все его  $k$ -элементные подмножества имеют цвет  $i$ .  $\square$

### Некоторые оценки на числа Рамселя

Назовём  $R(n, m) = R(2|n, m)$ .

**Теорема 3.10.2** (Верхняя оценка числа Рамселя).  $R(n, m) \leq \binom{n+m-2}{n-1}$ .

*Доказательство.*

Из доказательства теоремы Рамселя, имеем  $R(2; n, m) \leq 1 + R(1|R(2, n-1, m), R(2, n, m-1)) = R(n-1, m) + R(n, m-1)$ .

Тогда из индукции действительно  $\binom{n+m-2}{n-1} \leq \binom{n+m-3}{n-2} + \binom{n+m-3}{n-1}$  (вообще говоря, в формуле равенство).  $\square$

**Следствие 3.10.1.** *Асимптотическими оценками на биномиальные коэффициенты, получаем*

$$R(n, n) \leq (1 + o(1)) \frac{4^{n-1}}{\sqrt{2\pi n}}$$

**Теорема 3.10.3** (Нижняя оценка на числа Рамсея).

$$R(n, n) \geq 2^{n/2}$$

*Доказательство.* Рассмотрим  $n \geq 3$ . Пусть  $N < 2^{n/2}$ . Различных графов на  $N$  вершинах  $2^{\frac{N(N-1)}{2}}$ . Ребро проведено — первый цвет, ребра нет — второй цвет.

Покажем, что графов на  $N$  вершинах, содержащих клику на  $n$  вершинах, строго меньше, чем  $\frac{2^{\frac{N(N-1)}{2}}}{2}$ . Тогда очевидно, что графов, содержащих антиклику такое же количество, откуда есть граф на  $N$  вершинах, не содержащий ни того, ни другого.

Оценка на количество графов на  $N$  вершинах, содержащих клику на  $n$  вершинах:

Для данных  $n$  вершин есть  $2^{\frac{N(N-1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2}}$  графов, в которых эти  $n$  вершин — клика. Но тогда всего графов размера  $N$ , содержащих клику

$$\binom{N}{n} \cdot 2^{\frac{N(N-1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2}} < \frac{N^n}{n!} \cdot 2^{\frac{N(N-1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2}}$$

При  $N < (n!)^{\frac{1}{n}} \cdot 2^{\frac{n-1}{2} - \frac{1}{n}}$  это действительно меньше, чем  $2^{N(N-1)/2}$ . Так как  $n! > 2^{n/2+1}$  для  $n \geq 3$ , то  $N = \lfloor 2^{n/2} \rfloor$  подойдёт.  $\square$

Открытая задача: для каких  $\lambda$  верна асимптотическая оценка  $R(n, n) > \lambda^{n+o(n)}$ ?

### Применение чисел Рамсея

**Теорема 3.10.4** (Шур, 1917). Если натуральный ряд покрашен в конечное число цветов, то уравнение  $x + y = z$  имеет одноцветное решение.

*Доказательство.*

Рассмотрим полный граф, построенный на множестве вершин  $\mathbb{N}$ . Ребро  $(i, j)$  покрасим в цвет  $|i - j|$ . По теореме Рамсея, в этом графе найдётся одноцветный треугольник, то есть  $a < b < c : b - a, c - b, c - a$  одного цвета, откуда нашлось решение в виде  $(c - a) = (c - b) + (b - a)$ .  $\square$

**Теорема 3.10.5** (Фолькман — Радо — Сандерс). Для натурального ряда, покрашенного в конечное количество цветов, найдётся сколь угодно большое конечное подмножество, такое, что суммы всех его подмножеств имеют один и тот же цвет.

**Теорема 3.10.6** (Hindman, 1974). Для натурального ряда, покрашенного в конечное количество цветов, найдётся бесконечное подмножество, такое, что суммы всех его конечных подмножеств имеют один и тот же цвет.

## Лекция XI

24 октября 2022 г.

**Теорема 3.10.7.** Для любого  $k \in \mathbb{N}$  :  $\exists n \in \mathbb{N}$  : среди любых  $n$  точек общего положения найдутся  $k$ , образующих вершины выпуклого многоугольника.

*Доказательство.*

**Факт 3.10.1.** Среди любых 5 точек общего положения найдётся 4, формирующих вершины выпуклого четырёхугольника.

*Доказательство.* Пусть выпуклая оболочка данного набора точек содержит всего 3 точки, формируют треугольник ABC. Тогда остальные две лежат внутри, посмотрим на прямую, проходящую через эти две точки.  $\square$

**Факт 3.10.2.** Если в наборе из  $n \geq 4$  точек любые 4 формируют вершины выпуклого четырёхугольника, то все точки являются вершинами некоего выпуклого  $n$ -угольника.

*Доказательство.* От противного: пусть есть точка  $P$ , лежащая внутри выпуклой оболочки данного набора точек. Тогда есть треугольник, содержащий данную точку, противоречие.  $\square$

В качестве подходящего  $n$  рассмотрим  $R(4|5, k)$ . Здесь в первый цвет красятся четвёрки точек в невыпуклом положении, а во второй цвет — четвёрки точек в выпуклом положении.

Используя доказанные факты видим, что не может найтись пяти точек, любые 4 из которых в невыпуклом положении. Отсюда найдутся  $k$  точек, любые 4 из которых в выпуклом положении. То есть по сути все точки, среди данных  $k$ , формируют вершины некоего выпуклого  $k$ -угольника.  $\square$

### 3.10.2 Числа ван дер Вардена

**Теорема 3.10.8** (Ван Дер Варден, 1927). Пусть натуральный ряд раскрашен в конечное количество цветов,  $c$  цветов. Утверждается, что для данного  $k \in \mathbb{N}$  определено число ван дер Вардена  $W(k, c)$ , такое, что среди первых  $W(k, c)$  натуральных чисел найдётся одноцветная прогрессия длины  $k$ .

*Доказательство.*

- Спойлер: все пункты данного списка, кроме последнего, бесполезны.
- $W(1, c) = 1$  — ищем арифметическую прогрессию длины 1.
- $W(k, 1) = k$  — ищем арифметическую прогрессию длины  $k$ , один цвет.
- $W(2, c) = c + 1$  — ищем арифметическую прогрессию длины 2, по сути, два одноцветных элемента.
- $W(3, 2) = ?$ . Перебор показывает, что это 9, докажем без перебора худшую оценку.

**Лемма 3.10.1.** Рассмотрим блок из пяти подряд идущих чисел  $B = \{n, n + 1, \dots, n + 4\}$ .

Утверждается, что существуют  $a, d : \begin{cases} d > 0 \\ \{a, a + d, a + 2d\} \subset B \\ \chi(a) = \chi(a + d) \end{cases}$ .

*Доказательство.* Среди первых трёх  $\{n, n + 1, n + 2\}$  есть два одноцветных, возьмём их в качестве  $a$  и  $a + d$ .  $\square$

Разобьём натуральный ряд на блоки размера 5 :  $(1, 2, 3, 4, 5), (6, 7, 8, 9, 10), \dots$

**Лемма 3.10.2.** Среди  $165 = 5 \cdot (2^5 + 1)$  подряд идущих чисел найдутся два одинаково раскрашенных блока  $B_i, B_j$ , раскрашенных одинаково:

$$B_i = \{5i + 1, \dots, 5i + 5\}; \quad B_j = \{5j + 1, \dots, 5j + 5\}; \quad \begin{cases} \chi(5i + 1) = \chi(5j + 1) \\ \vdots \\ \chi(5i + 5) = \chi(5j + 5) \end{cases}$$

*Доказательство.* По принципу Дирихле.  $\square$

Используя (лемма 3.10.2), найдём два одинаково раскрашенных блока  $B_i, B_j$  ( $i < j$ ) среди первых 165 натуральных чисел.

Согласно (лемма 3.10.1), найдутся  $a, d$ :  $\chi(5i + a) = \chi(5i + a + d)$ . Если ещё и  $\chi(5i + a) = \chi(5i + a + 2d)$ , то одноцветная прогрессия нашлась. Значит, элемент  $\chi(5i + a + 2d)$  другого цвета. Тогда либо  $\chi(5i + a), \chi(5j + a + d), \chi(5(2j - i) + a + 2d)$ , либо  $\chi(5i + a + 2d), \chi(5j + a + 2d), \chi(5(2j - i) + a + 2d)$  формируют одноцветную прогрессию.

Так как  $5(2j - a) + (a + 2d) \leq 5(2 \cdot 32 - 0) + 5 = 325$ , то мы получили оценку  $W(3, 2) \leq 325$ .

- $W(3, 3) - ?$ . Перебор показывает, что это 27; докажем без перебора худшую оценку.

**Лемма 3.10.3.** *Рассмотрим блок из семи подряд идущих чисел  $B = \{n, n + 1, \dots, n + 6\}$ .*

*Утверждается, что существуют  $a, d$ :  $\begin{cases} d > 0 \\ \{a, a + d, a + 2d\} \subset B \\ \chi(a) = \chi(a + d) \end{cases}$ .*

*Доказательство.* Среди первых четырёх  $\{n, n + 1, n + 2, n + 3\}$  есть два одноцветных, возьмём их в качестве  $a$  и  $a + d$ .  $\square$

Разобьём натуральный ряд на блоки размера 7:  $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7), (8, 9, 10, 11, 12, 13, 14), \dots$

**Лемма 3.10.4.** *Среди  $889 = 7 \cdot (2^7 + 1)$  чисел найдутся два одинаково раскрашенных блока  $B_i, B_j$ , раскрашенных одинаково:*

$$B_i = \{7i + 1, \dots, 7i + 7\}; \quad B_j = \{7j + 1, \dots, 7j + 7\}; \quad \begin{cases} \chi(7i + 1) = \chi(7j + 1) \\ \vdots \\ \chi(7i + 7) = \chi(7j + 7) \end{cases}$$

*Доказательство.* По принципу Дирихле.  $\square$

Согласно (лемма 3.10.3), найдутся  $a, d$ :  $\chi(7i + a) = \chi(7i + a + d)$ . Если ещё и  $\chi(7i + a) = \chi(7i + a + 2d)$ , то одноцветная прогрессия нашлась. Значит, считаем, что элемент  $\chi(7i + a + 2d)$  другого цвета.

Среди  $7 \cdot (2 \cdot 2^7 + 1) = 1771$  натуральных чисел мы знаем, что  $\chi(7i + a) = \chi(7j + a + d)$ ; кроме того,  $\chi(7i + a + 2d) = \chi(7j + a + 2d)$ , а ещё эти цвета разные. Таким образом, мы нашли две арифметические прогрессии, имеющие общую точку цвета 3, цветовых типов  $(1, 1, 3)$  и  $(2, 2, 3)$ .

Пусть  $U = 1771$ . Разобьём первые  $W$  натуральных чисел на блоки из  $U$  подряд идущих ( $W$  определим позднее). Каждый такой блок может быть раскрашен не более, чем  $3^U$  способами. Рассмотрим раскраску  $\lfloor \frac{W}{U} \rfloor$  блоков, каждый блок длины  $U$ .

Хотим, чтобы нашлись два одинаковых блока, для этого возьмём  $W = U \cdot (3^U + 1)$ . Эти два блока,  $B_i$  и  $B_j$  ( $i < j$ ) каждый содержат арифметические прогрессии цветовых типов  $(1, 1, 3)$  и  $(2, 2, 3)$  с общей точкой цвета 3. Пусть данные прогрессии с общей точкой имеют индексы внутри блоков  $a, d, g$  и  $e, f, g$  соответственно.

Теперь надо увидеть, что среди  $2W$  чисел точно найдётся одноцветная прогрессия длины 3. Ну, посмотрим, какого цвета точка  $(2j - i)U + g$ .

- Если цвета 1, то нашли прогрессию  $iU + a, jU + d, (2j - i)U + g$ .
- Если цвета 2, то нашли прогрессию  $iU + e, jU + f, (2j - i)U + g$ .
- Если цвета 3, то нашли прогрессию  $iU + g, jU + g, (2j - i)U + g$ .

Получили оценку  $W(3, 3) \leq 2W = 2U \cdot (3^U + 1) = 2 \cdot 1771 \cdot (3^{1771} + 1)$ .

- $W(4, 2) - ?$ . Перебор показывает, что это 35; докажем без перебора худшую оценку (её я не смогу привести в численном виде, так как она основана на оценке на число  $W(3, 2^{2W(3, 2)})$ ).

Разобьём натуральный ряд на блоки длины  $U := 2W(3, 2)$ . По определению  $W(3, 2)$  в каждом таком блоке есть одноцветная прогрессия длины 3. В блоке длины  $U$  есть прогрессия длины 4 цветового типа  $(1, 1, 1, 2)$ .

По определению  $W(3, 2^U)$  среди  $U \cdot W(3, 2^U)$  натуральных чисел найдутся три блока длины  $U$ , имеющих один тип, да ёщё и формирующих прогрессию.

Пусть это блоки  $i < j < k$ ; пусть индексы прогрессии типа  $(1, 1, 1, 2)$  — это  $a, b, c, d$ .

Тогда одноцветную арифметическую прогрессию формируют либо

$$iU + a, jU + b, kU + c, (2k - j)U + d, \text{ либо } iU + d, jU + d, kU + d, (2k - j)U + d$$

Получили оценку  $W(4, 2) \leq 2(U \cdot W(3, 2^U)) \leq 4W(3, 2) \cdot W(3, 2^{2W(3, 2)})$  (дополнительное домножение на двойку нужно для того, чтобы  $(2k - j)$  попало внутрь).

### • Общий случай...

Зафиксируем  $k, c \in \mathbb{N}$ , оценим сверху  $W(k, c)$ . Будем действовать по индукции, по  $k$ .

База:  $k = 1$ , убедились, что  $W(1, c) = 1$ .

Переход: Зафиксируем  $c$ . Считаем, что  $W(k - 1, c)$  уже ограничено сверху для любого  $c$ .

**Лемма 3.10.5.** Для всякого  $n \in \mathbb{N}$  найдётся такое  $U(n)$ : во всякой раскраске в  $c$  цветов  $\{1, \dots, U(n)\}$ :

если нет  $n$  прогрессий длины  $k$ , имеющих общую точку цвета  $n + 1$ , таких, что  $i$ -я из них имеет цветовой тип  $(\underbrace{i, \dots, i}_{k-1}, n + 1)$ , то найдётся одноцветная

прогрессия длины  $k$ . Иными словами — если нет структуры, где в каждой из  $n$  прогрессий сначала идут  $k - 1$  число одного цвета, а потом число другого цвета (общее для всех прогрессий), причём цвета чисел в начале разные для всех  $n$  прогрессий — то найдётся одноцветная прогрессия длины  $k$ .

Доказательство леммы.

По индукции, по  $n$ .

База:  $n = 1$ . Здесь  $U(n) = 2W(k - 1, c)$ : среди такого количества чисел найдётся одноцветная прогрессия длины  $k - 1$  в первой половине. Если её  $k$ -й элемент окажется такого же цвета, то следствие импликации верно. Иначе не выполнится посылка — на самом деле нашлась одна ( $n = 1$ ) прогрессия, имеющая нужный цветовой тип и общую точку в конце (прогрессия одна, все точки общие).

Переход: Здесь  $U(n) = 2U(n - 1) \cdot W(k - 1, c^{U(n-1)})$ . Разобьём эти  $U(n)$  чисел на блоки размера  $U(n - 1)$ .

Возьмём первую половину, первые  $W(k - 1, c^{U(n-1)})$  из них. Там найдётся арифметическая прогрессия из  $k - 1$  такого блока, причём блоки, входящие в эту прогрессию, будут полностью совпадать по цвету.

Если в этих блоках в каждом есть прогрессия длины  $k$ , то мы нашли прогрессию длины  $k$  среди  $U(n)$  чисел. Иначе в каждом таком блоке есть одинаковые структуры из  $n - 1$  прогрессии с общей конечной точкой. Пусть это блоки  $i_1, \dots, i_{k-1}$ .

Пусть  $j$ -я прогрессия внутри каждого блока индексируется  $\underbrace{\text{idx}_{j,1}, \dots, \text{idx}_{j,k-1}}_{\text{цвета } j}, \text{idx}_{j,k}$ .

$\text{idx}_{j,k}$  одинаковы для всех  $j$ . Обозначим их общее значение  $\text{idx}_k$ .

Тогда заметим структуру для  $n$  арифметических прогрессий с общей точкой в конце:  $i$ -я прогрессия имеет вид

$$\begin{cases} U(n-1) \cdot i_1 + \text{idx}_{j,1}, \dots, U(n-1) \cdot i_{k-1} + \text{idx}_{j,k-1}, U(n-1) \cdot i_k + \text{idx}_{j,k}, & j < n \\ U(n-1) \cdot i_1 + \text{idx}_k, \dots, U(n-1) \cdot i_{k-1} + \text{idx}_k, U(n-1) \cdot i_k + \text{idx}_k, & j = n \end{cases}$$

Несложно убедиться, что все эти прогрессии имеют разные цвета в начале и общую точку в конце.  $\square$

Применим лемму для  $n = c$ . Получим условие, что если среди  $\{1, \dots, U(c)\}$  нет структуры, состоящей из  $n$  прогрессий с разными цветами в начале и общей точкой другого цвета в конце — а их действительно нет, для такой структуры нужен как минимум  $n+1$  цвет — то найдётся одноцветная прогрессия длины  $k$ .  $\square$

**Теорема 3.10.9** (Семереди, 1975). Для любой плотности  $\delta \in (0; 1)$  и любого  $k \in \mathbb{N}$  имеется число  $N(k, \delta)$ : любое подмножество  $\{1, \dots, N(k, \delta)\}$  мощности  $\lfloor \delta \cdot N(k, \delta) \rfloor$  содержит арифметическую прогрессию длины  $k$ .