

# Алгебраическая геометрия

## Предисловие

Конспект написан по материалам лекций, прочитанных А.С. Сивацким студентам бакалавриата «Математика» и магистратуры «Современная математика» факультета Математики и Компьютерных наук СПбГУ. В конспекте присутствуют материалы спецкурса «Основы алгебраической геометрии, часть I».

Конспект набран Матвеем Магиным, редактировался Леонидом Данилевичем. Как и в любом большом тексте, в нём наверняка присутствуют опечатки и неточности. Если Вы хотите сообщить о них, Вы можете написать составителю на электронную почту [matheusz.magin@gmail.com](mailto:matheusz.magin@gmail.com).

Составитель признателен коллегам, сообщавшим об опечатках и неточностях.

Исходные файлы конспекта Вы можете найти в проекте по адресу

<https://www.overleaf.com/read/fcnprrfdmqqm#81c360>.

## Содержание

<b>1 Аффинные многообразия</b>	<b>3</b>
1.1 Введение. Аффинные алгебраические многообразия. Идеалы, неприводимые многообразия. . . . .	3
1.2 Разложение в неприводимые компоненты . . . . .	6
1.3 Размерность аффинного многообразия . . . . .	8
1.4 Регулярные функции . . . . .	11
1.5 Морфизмы алгебраических многообразий . . . . .	13
1.6 Антиэквивалентность $\text{Aff}^{\text{op}} \cong \mathbb{k}\text{-Alg}$ . . . . .	14
1.7 Рациональные функции . . . . .	16
1.8 Главные аффинные окрестности . . . . .	16
1.9 Эквивалентные определения размерности неприводимого аффинного многообразия	18
1.10 Прямое произведение многообразий и его первые приложения . . . . .	19
1.11 О количестве порождающих идеала . . . . .	21
<b>2 Проективные многообразия</b>	<b>24</b>
2.1 Проективные многообразия . . . . .	24
2.2 Проективное замыкание аффинного многообразия . . . . .	28
2.3 Прямое произведение проективных многообразий . . . . .	29
2.4 Замкнутость образа проективного многообразия . . . . .	32
2.5 Рациональные отображения многообразий . . . . .	35
2.6 Бирациональная эквивалентность . . . . .	37
2.7 Рациональные многообразия . . . . .	38
<b>3 Локальные кольца</b>	<b>40</b>
3.1 Локальное кольцо в точке . . . . .	40
3.2 Касательное пространство . . . . .	43
3.3 Разложение в ряд Тейлора . . . . .	46

3.4	Локальное кольцо точки на неособой кривой. Индексы ветвления и степень инерции. . . . .	49
3.5	Конечные морфизмы и нормализация многообразия . . . . .	50
3.6	Морфизмы между неособыми кривыми . . . . .	54
3.7	Морфизмы между неособыми проективными неприводимыми кривыми . . . . .	55
<b>4</b>	<b>Дивизоры</b>	<b>56</b>
4.1	Дивизоры Вейля . . . . .	56
4.2	Дивизоры форм . . . . .	60
4.3	Дивизоры на эллиптических кривых. . . . .	61
4.4	Групповой закон для точек эллиптической кривой . . . . .	63
<b>5</b>	<b>Приложение: альтернативное доказательство того, что степень главного дивизора равна нулю</b>	<b>66</b>
5.1	План доказательства . . . . .	66
5.2	Аппроксимационная теорема. Оценка в одну сторону . . . . .	66
5.3	Пространство функций, ассоциированное с дивизором. Оценка в другую сторону	68
<b>6</b>	<b>Приложение: компендиум по коммутативной алгебре</b>	<b>70</b>

# 1 Аффинные многообразия

## 1.1 Введение. Аффинные алгебраические многообразия. Идеалы, неприводимые многообразия.

Прежде всего отметим, что в данном курсе будет изучаться (квази)аффинная и (квази)проективная алгебраическая геометрия и речь пойдет о (квази)аффинных и (квази)проективных многообразиях.

Пусть  $\mathbb{k}$  — алгебраически замкнутое поле, через  $\mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n = \mathbb{A}^n$  мы будем обозначать  $\mathbb{k}^n$ , рассматриваемое как множество, и будем называть это множество  $n$ -мерным *аффинным пространством* над  $\mathbb{k}$ . Определим на нём топологию.

**Определение 1.** Рассмотрим  $T \subset \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$  и определим

$$Z(T) \stackrel{\text{def}}{=} \{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n \mid f(a_1, \dots, a_n) = 0 \quad \forall f \in T\}.$$

*Замечание 1.* В случае  $T = \emptyset$  естественно полагать  $Z(T) = \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n$ . Кроме того, сразу заметим, что  $Z((1)) = \emptyset$ .

*Замечание 2.* Пусть  $I = (T)$  — идеал, порождённый множеством  $T$ . В этом случае  $Z(T) = Z(I)$ , так как если  $(a_1, \dots, a_n)$  является нулём для всех элементов идеала, то для  $T \subset I$  уж тем более, и, кроме того, если  $(a_1, \dots, a_n)$  является общим нулём многочленов из  $T$ , то многочлен  $f \in I$  мы можем представить в виде

$$f = \sum g_i h_i, \quad h_i \in T, \quad g_i \in \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$$

откуда ясно, что  $f(a_1, \dots, a_n) = 0$ .

Отсюда ясно, что достаточно рассматривать не произвольные подмножества  $\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ , а идеалы этого кольца.

**Определение 2.** Введём на  $\mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n$  топологию Зарисского следующим образом: объявим замкнутыми все множества вида  $Z(T)$  для некоторого  $T$ .

Покажем, что это действительно топология.

1. Ясно, что  $Z(T_1) \cup Z(T_2) = Z(T_1 T_2)$ , где  $T_1 T_2 = \{f_1 f_2 \mid f_1 \in T_1, f_2 \in T_2\}$ .

Совсем очевидно, что левая часть лежит в правой. Обратно, пусть  $f_1 f_2(a_1, \dots, a_n) = 0 \quad \forall f_1 \in T_1, f_2 \in T_2$ . Раз  $f_1 f_2(a_1, \dots, a_n) = 0$ , то хотя бы один многочлен из произведения зануляется.

2. Кроме того, ясно, что  $\bigcap_{i \in I} Z(T_i) = Z\left(\bigcup_{i \in I} T_i\right)$ .

**Пример 1.** Рассмотрим  $\mathbb{A}_{\mathbb{k}}^1$ . Какими могут быть замкнутые множества? Пусть  $I = (T)$ . Так как  $\mathbb{k}[x]$  — область главных идеалов, то и идеал  $I$  — главный.

- Если  $I = 0$  то  $Z(I) = \mathbb{A}^1$  — замкнутое.
- Если  $I = (1)$ , то  $Z(T) = \emptyset$ .
- Если, наконец,  $I = (f)$ ,  $f$  необратим, то в силу алгебраической замкнутости  $\mathbb{k} : f(x) = (x - a_1) \cdot \dots \cdot (x - a_n)$ , откуда  $Z(T) = \{a_1, \dots, a_n\}$  — конечный набор точек.

С другой стороны, если у нас есть конечное множество  $\{a_1, \dots, a_n\} \subset \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^1$ , то оно является множеством нулей многочлена

$$f(x) = \prod_{i=1}^n (x - a_i).$$

Таким образом, замкнутые подмножества аффинной прямой — в точности все конечные подмножества  $\mathbb{A}_{\mathbb{k}}^1$ , пустое и сама прямая  $\mathbb{A}_{\mathbb{k}}^1$ . Отсюда сразу видно, что любые два открытых подмножества пересекаются и топология Зарисского не хаусдорфова. Хаусдорфовости не будет и в общем случае, что показывает, что интуицию из топологии, скажем, на  $\mathbb{R}^n$ , надо перенимать с осторожностью.

**Определение 3.** Пусть  $X$  — топологическое пространство,  $Y \subset X$ ,  $Y \neq \emptyset$ .  $Y$  называется *неприводимым*, если из равенства  $Y = Y_1 \cup Y_2$ , где  $Y_i$  замкнуты в  $Y$ , следует, что  $Y_1 = Y$  или  $Y_2 = Y$ .

То есть, неприводимые множества — в точности те, которые нельзя представить в виде объединения двух меньших замкнутых подмножеств.

**Пример 2.** Аффинная прямая  $\mathbb{A}_{\mathbb{k}}^1$  неприводима (просто из соображений мощности).

Теперь докажем такой общетопологический факт:

**Предложение 1.** *Непустое открытое подмножество неприводимого — неприводимо и плотно. Замыкание неприводимого множества неприводимо.*

*Доказательство.* Пусть  $U \subset Y$  — открытое подмножество. Покажем, что оно неприводимо. Пусть

$$U = (U \cap F_1) \cup (U \cap F_2), \quad F_1, F_2 \text{ замкнуты в } Y.$$

Тогда  $Y = F_1 \cup F_2 \cup (Y \setminus U)$ , а так как  $Y$  — неприводимо,  $Y$  совпадает с каким-то из этих множеств. С  $Y \setminus U$  оно совпасть не может, так как  $U \neq \emptyset$ . Значит,  $Y = F_i \implies U \cap F_i = U \cap Y = U$ , что мы и хотели.

Теперь докажем, что  $\overline{U} = Y$ . Действительно,  $Y = (Y \setminus U) \cup \overline{U}$  и из неприводимости  $Y$  и непустоты  $U$  следует, что  $\overline{U} = Y$ .  $\square$

**Определение 4.** Замкнутые непустые подмножества в  $\mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n$  мы будем называть *аффинными алгебраическими многообразиями*<sup>1</sup>.

**Пример 3.** Рассмотрим  $\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$ . Это множество не является замкнутым в нашей топологии. С другой стороны, есть взаимно-однозначное соответствие между этим множеством и множеством  $\{(x, y) \in \mathbb{A}^2 \mid xy - 1 = 0\}$ , которое является аффинным многообразием.

В одну сторону нам надо сделать проекцию графика гиперболы на горизонтальную ось:  $(x, y) \mapsto x \in \mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$ , а в обратную сторону, мы можем отобразить  $\mathbb{A}^1 \setminus \{0\} \ni x \mapsto (x, x^{-1})$ .

*Замечание 3.* Пример выше наводит на мысль о том, что наше определение не достаточно общее. Довольно скоро мы его обобщим. Вообще говоря, в данном конспекте под словом *многообразие* будет пониматься самое общее, что введено к данному моменту курса.

<sup>1</sup>Отметим, что в книге Хартсхорна все аффинные алгебраические многообразия предполагаются неприводимыми.

**Определение 5.** Рассмотрим произвольное подмножество  $Y \subset \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n$ , положим

$$I(Y) \stackrel{\text{def}}{=} \{f \in \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n] \mid f(y) = 0 \quad \forall y \in Y\}.$$

Совершенно ясно, что  $I(Y)$  — идеал. Кроме того, отметим, что для  $Y = \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n : I(Y) = 0$ , а для  $Y = \emptyset : I(Y) = (1)$ . Таким образом, у нас есть отображения

$$\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n] \supset T \mapsto Z(T), \quad \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n \supset Y \mapsto I(Y).$$

**Предложение 2.** *Определённые выше отображения имеют следующие свойства:*

1. Если  $T_1 \subset T_2$ , где  $T_1, T_2 \subset \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ , то  $Z(T_1) \supset Z(T_2)$ .
2. Если  $Y_1 \subset Y_2 \subset \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n$ , то  $I(Y_1) \supset I(Y_2)$ .
3.  $I(Y_1 \cup Y_2) = I(Y_1) \cap I(Y_2)$ .
4. Пусть  $Y \subset \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n$ , тогда  $Z(I(Y)) = \overline{Y}$ .
5. Пусть  $I \trianglelefteq \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ , тогда  $I(Z(I)) = \sqrt{I}$ .

*Доказательство.* Первые три пункта очевидны.

Четвёртый пункт следует просто из определений. С одной стороны, ясно, что  $Y \subset Z(I(Y))$ . С другой стороны, пусть  $T = Z(\mathfrak{a})$  — произвольное замкнутое множество, содержащее  $Y$ . Раз  $Y \subset T$ , то легко проверить, что  $\mathfrak{a} \subset I(Y)$ <sup>2</sup>. Пункт 1 влечёт  $T = Z(\mathfrak{a}) \supset Z(I(Y))$ , что по произвольности  $T$  даёт искомое.

Пятый пункт — в частности (сильная) теорема Гильберта о нулях 33. □

**Предложение 3.** *Отображения  $Y \mapsto I(Y)$  устанавливает взаимно-однозначное соответствие между аффинными многообразиями в  $\mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n$  и радикальными идеалами кольца многочленов  $\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ .*

*При этом, неприводимым аффинным многообразиям соответствуют простые идеалы и наоборот.*

*Доказательство.* Четвёртый и пятый пункты предыдущего предложения 2 как раз означают то, что отображения  $Z$  и  $I$  взаимно обратные

Пусть теперь  $Y$  неприводимо. Покажем, что  $I(Y)$  — простой идеал. Рассмотрим  $f, g \in \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ , пусть  $fg \in I(Y)$ . Заметим, что

$$Y = (Y \cap Z(f)) \cup (Y \cap Z(g)),$$

значит, одно из этих множеств совпадает с  $Y$ . Пусть, например,  $Y = Y \cap Z(f) \implies Y \subset Z(f) \implies f \in I(Y)$ .

Наоборот, предположим, что  $I(Y)$  — простой идеал. Пусть  $Y = Y_1 \cup Y_2$ , тогда

$$I(Y) = I(Y_1) \cap I(Y_2) \supset I(Y_1)I(Y_2).$$

Так как идеал простой, не умаляя общности,  $I(Y_1) \subset I(Y) \implies Y \subset Y_1 \implies Y = Y_1$ , что мы и хотели. □

<sup>2</sup>А именно:  $\forall f \in \mathfrak{a} : f(T) = f(Z(\mathfrak{a})) = 0$ , откуда  $f(Y) = 0$ , то есть  $f \in I(Y)$ .

Посмотрим, куда при этом соответствии переходят точки (одноточечные подмножества  $\mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n$ ). Пусть  $P = (a_1, \dots, a_n)$ . Множество  $\{P\}$  замкнуто, так как оно равняется  $Z((x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n))$ .

Из обращения включений в 2 понятно, что точки — минимальные замкнутые множества — соответствуют максимальным идеалам кольца  $\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ .

Слабая теорема Гильберта о нулях 34 говорит, что все максимальные идеалы  $\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$  имеют вид  $(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$ , то есть других максимальных идеалов нет, все соответствуют точкам. Тем самым, имеется биекция

$$\text{точки } \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n \longleftrightarrow \text{Specm}(\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]).$$

## 1.2 Разложение в неприводимые компоненты

**Определение 6.** Топологическое пространство  $X$  называется *нётеровым*, если оно удовлетворяет DCC для замкнутых множеств. Иными словами, всякая цепочка  $Z_0 \supset Z_1 \supset Z_2 \supset \dots$  стабилизируется:  $\exists n \in \mathbb{N} : Z_n = Z_{n+1} = \dots$

Или же, еще более иными словами, в любом семействе замкнутых множеств содержится минимальный (по включению) элемент.

**Пример 4.**  $\mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n$  является нётеровым, так как по теореме Гильберта о базисе  $\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$  — нётерово кольцо.

В самом деле, если  $Z_0 \supset Z_1 \supset \dots$ , то  $I(Z_0) \subset I(Z_1) \subset \dots$  Так как  $\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$  — нётерово,  $\exists m : I(Z_m) = I(Z_{m+1}) = \dots$ , и, применяя  $Z$ , мы имеем  $Z_m = Z_{m+1} = \dots$

**Теорема 1.** Пусть  $X$  — нётерово пространство,  $Y \subset X$  — замкнутое. Тогда существует единственное разложение  $Y = Y_1 \cup Y_2 \cup \dots \cup Y_m$ , где  $Y_i$  — замкнутые неприводимые множества и  $\forall i, j : Y_i \not\subset Y_j$ .

**Доказательство. Существование.** Пусть существуют замкнутые множества  $Y$ , не разлагающиеся в объединение неприводимых. В силу нётеровости пространства, мы можем выбрать минимальное множество с таким свойством и обозначить его за  $Y$ .

Совершенно ясно, что оно не может быть неприводимым. Тем самым его можно представить в виде  $Y = T_1 \cup T_2$ , где  $T_1, T_2$  — замкнутые и не совпадают с  $Y$ . Так как  $T_1, T_2 \subset Y$ , а  $Y$  — минимальное из тех, что не разложить, то  $T_i$  мы уже можем представить в виде объединения неприводимых, а значит, и  $Y$ , что даёт нам противоречие.

**Единственность.** Пусть  $Y = Y_1 \cup Y_2 \cup \dots \cup Y_m = Y'_1 \cup \dots \cup Y'_s$ . Тогда

$$Y_1 = \bigcup_i (Y_1 \cap Y'_i) \implies Y_1 \subset Y'_i.$$

Проводя аналогичное рассуждение для  $Y'_i$ , мы получаем, что  $Y'_i \subset Y_j$  для некоторого  $j$ . Но, так как, в силу посылки теоремы, между компонентами не может быть включений, то  $j = 1$  и  $Y_1 = Y'_i$ . Повторяя аналогичный аргумент с остальными индексами, получаем единственность.  $\square$

**Определение 7.** Замкнутые неприводимые множества  $Y_i$ , определённые в теореме выше, называют *неприводимыми компонентами*  $Y$ .

Пусть теперь  $Y$  — аффинное алгебраическое многообразие. Так как оно вложено в некоторое  $\mathbb{A}^n$ , то оно также раскладывается в объединение неприводимых компонент.

Итак, пусть  $Y = Y_1 \cup \dots \cup Y_m$ , тогда  $I(Y) \subset I(Y_i)$ , а  $I(Y_i)$  — простые идеалы (так как  $Y_i$  неприводимы).

**Предложение 4.** *Идеалы  $I(Y_i)$  — в точности наименьшие простые идеалы, содержащие  $I(Y)$ .*

*Доказательство.* Пусть  $T \subset Y$  — неприводимое подмножество, тогда

$$T = \bigcup_{i=1}^m (T \cap Y_i) \implies T \subset Y_i.$$

Пусть  $Y = Z(I)$ , а  $Y_i = Z(\mathfrak{p}_i)$ ,  $I \subset \mathfrak{p}_i \in \text{Spec}(\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n])$ .

Предположим, что  $I \subset \mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{p}_i$  для некоторого  $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n])$ . Тогда  $Z(\mathfrak{p}) \subset Y$  — неприводимое подмножество, и как проверено выше,  $Z(\mathfrak{p}) \subset Z(\mathfrak{p}_j)$  для некоторого  $\mathfrak{p}_j$ . Но отсюда сразу следует

$$\underbrace{Z(\mathfrak{p}_j)}_{=Y_j} \subsetneq \underbrace{Z(\mathfrak{p}_i)}_{=Y_i},$$

что даёт нам противоречие.

Теперь, возьмём произвольный минимальный простой идеал  $\mathfrak{p} \supset I$  и покажем, что он даёт нам неприводимую компоненту (т.е., что он будет совпадать с одним из  $\mathfrak{p}_i$ ).

В самом деле, для некоторого  $i$  мы имеем  $Z(\mathfrak{p}) \subset Z(\mathfrak{p}_i) \implies \mathfrak{p}_i \subset \mathfrak{p}$ , откуда по минимальности  $\mathfrak{p}$  мы имеем  $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{p}$ .  $\square$

Дадим теперь следующее определение:

**Определение 8.** Пусть  $Y$  — аффинное многообразие. Его *аффинным координатным кольцом* мы будем называть  $A(Y) = \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]/I(Y)$ .

**Домашнее задание 1.** Задачи:

1. Любое подпространство нётерова пространства нётерово.
2. Нётерово пространство квазикомпактно<sup>3</sup>.
3. Имеется отображение  $f: \mathbb{A}^2 \rightarrow \mathbb{A}^2$ ,  $f(x, y) = (x, xy)$ . Вычислить образ и определить, будет ли этот образ  $f(\mathbb{A}^2)$  открытым/замкнутым/плотным подмножеством в  $\mathbb{A}^2$ .
4. Пусть  $f: \mathbb{A}^3 \rightarrow \mathbb{A}^3$ ,  $f(x, y, z) = (x, xy, xyz)$ . Вычислить образ и определить, будет ли этот образ  $f(\mathbb{A}^2)$  открытым/замкнутым/плотным подмножеством в  $\mathbb{A}^3$ .
5. Пусть  $Y \subset \mathbb{A}^3$ ,  $Y = Z(x^2 - yz, xz - x)$ .
6. Найти неприводимые компоненты  $Y$ .
7. Вычислить неприводимые компоненты  $Y = Z(y^2 - xz, z^2 - y^3)$ .
8. Рассмотрим  $Y = \{(t^3, t^4, t^5) \in \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^3\}$ .
  - (a)  $Y$  — аффинное многообразие в  $\mathbb{A}^3$ .
  - (b) Докажите, что  $I(Y)$  порождается тремя элементами и найдите их.

<sup>3</sup>То есть из всякого открытого покрытия можно выделить конечное подпокрытие. Слово квазикомпактность выдумали, чтобы не путать с обычной компактностью, которую иногда определяют так, что компакт по определению хаусдорфов.

- (c) Докажите, что  $I(Y)$  не порождается двумя элементами.
9. Рассмотрим  $Y = Z(y^2 - x^3)$  и аффинное координатное кольцо  $A(Y) = \mathbb{k}[x, y]/I(Y)$ . Докажите, что поле частных этого кольца изоморфно  $\mathbb{k}[k](t)$ . Выясните, является ли кольцо  $A(Y)$  целозамкнутым.

### 1.3 Размерность аффинного многообразия

Пусть  $X$  — произвольное топологическое пространство. Тогда его размерность  $\dim X$  определяется аналогично размерности Крулля для кольца в коммутативной алгебре. А именно, рассматривается максимальная длина убывающей цепочки непустых замкнутых неприводимых множеств:

$$X_0 \supsetneq X_1 \supsetneq X_2 \dots \supsetneq X_n.$$

и размерностью  $X$  называется такое максимально возможное  $n$ .

**Предложение 5.** *Пусть  $Y$  — многообразие, а  $A(Y)$  — его координатное кольцо. Тогда*

$$\dim Y = \dim A(Y).$$

*Доказательство.* Замкнутые неприводимые подмножества  $Y \subset \mathbb{A}^n$  соответствуют простым идеалам кольца  $\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ , содержащим  $I(Y)$ , а они, в свою очередь, соответствуют простым идеалом координатного кольца  $A(Y) = \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]/I(Y)$ . Значит,  $\dim Y$  равна наибольшей из длин цепочек отличных друг от друга простых идеалов в  $A(Y)$ , то есть размерности Крулля  $A(Y)$ .  $\square$

Это предложение показывает, что результаты из теории размерности нётеровых колец весьма-весьма полезны в алгебраической геометрии.

Вычислим теперь размерности каких-то базовых пространств. В  $\mathbb{A}^n$  легко найти цепочку замкнутых подмножеств  $\mathbb{A}^n \supset Z(x_1) \supset Z(x_1, x_2) \supset \dots \supset Z(x_1, \dots, x_n)$ , но доказать, что большей цепочки нет, сильно сложнее.

Чтобы сделать это, докажем следующую теорему из коммутативной алгебры:

**Теорема 2.** *Пусть  $B$  — конечно порождённая  $\mathbb{k}$ -алгебра. Если  $B$  — область целостности, то  $\dim(B) = \text{trdeg}_{\mathbb{k}}(\text{Frac}(B))$  (где  $\text{Frac}(B)$  — поле частных  $\mathbb{k}$ -алгебры  $B$ ).*

*Доказательство.* Будем вести индукцию по  $\text{trdeg}_{\mathbb{k}}(\text{Frac}(B))$ .

Случай  $\text{trdeg}_{\mathbb{k}}(\text{Frac}(B)) = 0$  тривиален — в таком случае расширение  $\text{Frac}(B)/\mathbb{k}$  чисто алгебраическое, и из алгебраической замкнутости  $\mathbb{k}$ :  $\text{Frac}(B) = \mathbb{k}$ . Но раз  $B$  —  $\mathbb{k}$ -алгебра, то  $B = \mathbb{k}$ , и, разумеется,  $\dim B = 0$ .

Теперь пусть  $\text{trdeg}_{\mathbb{k}}(\text{Frac}(B)) > 0$ . Согласно лемме Нётер о нормализации 31, внутри  $B$  содержится подкольцо  $A \subset B$ , изоморфное кольцу многочленов  $A \cong \mathbb{k}[x_1, \dots, x_m]$ , и включение  $A \subset B$  конечно. Так как при целом (тем более при конечном) расширении размерность не меняется, то  $\dim A = \dim B$ . С другой стороны, раз  $A \subset B$  конечно, то расширение полей частных алгебраическое, откуда  $\text{trdeg}_{\mathbb{k}}(\text{Frac}(A)) = \text{trdeg}_{\mathbb{k}}(\text{Frac}(B))$ , значит, достаточно доказать посылку теоремы лишь для кольца многочленов  $A = \mathbb{k}[x_1, \dots, x_m]$ .

Выберем цепочку простых идеалов  $0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{p}_n \subset A$ , где  $n = \dim A$  (мы ещё не доказали, что размерность  $A$  равна количеству переменных  $m$ , и пока лишь очевидно, что  $n \geq m$ ). Докажем следующую лемму:

**Лемма 1.** Пусть  $A$  — факториальная область целостности, и  $\mathfrak{p}_1 \subset A$  — простой идеал высоты 1. Тогда  $\mathfrak{p}_1 = (p)$  — главный идеал для некоторого неприводимого  $p \in A$ .

*Доказательство.* Так как  $\mathfrak{p}_1 \neq 0$ , то  $\exists 0 \neq f \in \mathfrak{p}_1$ . Он раскладывается на неприводимые множители, и из простоты  $\mathfrak{p}_1$ , хотя бы один из этих множителей (пусть  $p$ ) лежит внутри  $\mathfrak{p}_1$ . Получается, идеал  $(p) \subset \mathfrak{p}_1$  — тоже простой, и из максимальности цепочки  $\mathfrak{p}_1 = (p)$ .  $\square$

Отфакторизуем кольцо многочленов  $A$  по  $\mathfrak{p}_1$ , и посмотрим, что получится.

Идеал  $\mathfrak{p}_1$  — высоты 1 (так как цепочка максимальна), откуда в силу леммы  $\mathfrak{p}_1 = (p)$ , и пусть без потери общности  $x_1$  входит в  $p$  нетривиальным образом. Тогда образы  $x_2, \dots, x_m$  внутри  $\text{Frac}(A/(p))$  образуют базис трансцендентности (очевидно, что они порождают всё поле частных  $\text{Frac}(A/(p))$ , а независимость даже и не пригодится). Тем самым,  $\text{trdeg}_{\mathbb{k}} \text{Frac}(A/(p)) \leq m - 1$ , откуда по индукции  $\dim A/(p) = m - 1$ . Но цепочка  $0 = \mathfrak{p}_1/(p) \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{p}_n/(p)$  внутри  $A/(p)$  имеет длину  $n - 1$ , откуда  $n - 1 \leq m - 1$ , и мы доказали обратное неравенство.  $\square$

**Пример 5.** Отсюда мы сразу получаем, что  $\dim \mathbb{A}^n = \dim \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n] = n$ .

**Определение 9.** Аффинная алгебра — это координатное кольцо некоторого аффинного многообразия.

**Замечание 4.** Эквивалентно можно говорить, что аффинная алгебра — это конечно порождённая редуцированная алгебра. В самом деле, координатное кольцо любого аффинного многообразия — это факторкольцо  $\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$  по радикальному идеалу, оно конечно порождено над  $\mathbb{k}$  и редуцировано. Обратно, любое конечно порождённое над  $\mathbb{k}$  кольцо представимо в виде факторкольца кольца многочленов, а редуцированность означает, что идеал, по которому происходит факторизация, радикален.

**Теорема 3.** Пусть  $B$  — целостная аффинная алгебра над  $\mathbb{k}$  (или, что эквивалентно, конечно порождённая целостная  $\mathbb{k}$ -алгебра), а  $\mathfrak{p} \in \text{Spec } B$ . Тогда

$$\text{ht } \mathfrak{p} + \dim B/\mathfrak{p} = \dim B.$$

*Доказательство.* Будем вести индукцию по  $\dim B$ . База ( $\dim B = 0$ ) очевидна.

Рассмотрим два варианта — сначала равенство  $B$  кольцу многочленов, потом общий случай.

I. Пусть  $B = \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ ,  $\dim B = n$ . Возьмём  $\mathfrak{p} \in \text{Spec } B$ ,  $\text{ht } \mathfrak{p} = m$ , то есть

$$0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \mathfrak{p}_2 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{p}_m = \mathfrak{p}.$$

Тогда  $\text{ht } \mathfrak{p}_1 = 1$ , и идеал  $\mathfrak{p}_1 = (p)$  — главный в силу леммы 1

Отфакторизуем по  $(p)$ :  $\mathfrak{p}/(p) \trianglelefteq B/(p)$ ,  $\mathfrak{p}/(p) \in \text{Spec } B/(p)$ . Так как  $(p)$  — главный идеал, то по предыдущей теореме 2:  $\dim B/(p) = \dim B - 1$  (несложно предъявить базис трансцендентности  $\text{Frac}(B/(p))$ ), значит, мы можем применить индукционное предположение:

$$\text{ht } \mathfrak{p}/(p) + \dim B/\mathfrak{p} = \dim B - 1.$$

Докажем, что  $\text{ht } \mathfrak{p}/(p) = \text{ht } \mathfrak{p} - 1$ . Очевидно, что  $\text{ht } \mathfrak{p}/(p) \geq \text{ht } \mathfrak{p} - 1$ . С другой стороны, если  $\pi: B \rightarrow B/(p)$ , то всякая цепочка для  $\mathfrak{p}/(p)$

$$0 \subsetneq \mathfrak{q}_1 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{q}_s = \mathfrak{p}/(p),$$

поднимается до цепочки для  $\mathfrak{p}$ :

$$0 \subsetneq (\mathfrak{q}) \subsetneq \pi^{-1}(0) \subsetneq \pi^{-1}(\mathfrak{q}_1) \subsetneq \dots \subsetneq \pi^{-1}(\mathfrak{q}_s) = \mathfrak{p}.$$

II. Пусть  $B$  — произвольная конечно порождённая целостная  $\mathbb{k}$ -алгебра. По лемме Нётер о нормализации  $B$  — целое расширение  $A = \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ ,  $\dim B = \dim A$ . Дальше по теореме о спуске для  $\mathfrak{q} \in \text{Spec } B$  мы имеем  $\text{ht } \mathfrak{q} \geq \text{ht}(\mathfrak{q} \cap A)$ . Кроме того, расширение

$$A/(\mathfrak{q} \cap A) \hookrightarrow B/\mathfrak{q}$$

тоже целое, откуда  $\dim A/(\mathfrak{q} \cap A) = \dim B/\mathfrak{q}$ . Получается, мы имеем

$$\dim B/\mathfrak{q} + \text{ht } \mathfrak{q} \geq \dim(A/\mathfrak{q} \cap A) + \text{ht}(\mathfrak{q} \cap A)$$

По пункту I, правая часть равна  $\dim A = \dim B$ , то есть мы показали, что

$$\dim B/\mathfrak{q} + \text{ht } \mathfrak{q} \geq \dim B.$$

Но неравенство в другую сторону очевидно.  $\square$

**Следствие 1.** Пусть  $B$  — целостная конечно порождённая алгебра,  $f \in B$ ,  $f \neq 0$  и  $f$  необратим. Пусть  $\mathfrak{p}$  — минимальный простой идеал, содержащий  $f$ . Тогда

$$\dim B/\mathfrak{p} = \dim B - 1.$$

*Доказательство.* По теореме 3 мы имеем

$$\text{ht } \mathfrak{p} + \dim B/\mathfrak{p} = \dim B.$$

Но, по теореме Крулля о главных идеалах (hauptidealsatz),  $\text{ht } \mathfrak{p} = 1$ , откуда мы имеем нужное.  $\square$

Переформулируем это на алгебро-геометрический язык:

**Определение 10.** (Необязательно неприводимая) гиперповерхность в  $\mathbb{A}^n$  — множество вида  $Z(f)$ , где  $f \in \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$  необратим,  $f \neq 0$ .

**Следствие 2.** Пересечение неприводимого многообразия  $X$  с гиперповерхностью  $Z(f)$  имеет размерность каждой компоненты хотя бы  $\dim X - 1$ .

*Доказательство.* Пусть  $X \subset \mathbb{A}^n$  задаётся идеалом  $I(X)$ . Его размерность — размерность координатного кольца  $A(X) = \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]/I(X)$ . При этом координатное кольцо пересечения — это  $A(X \cap Z(f)) = \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]/\sqrt{I(X) + (f)} = A(X)/\sqrt{(f)}$ . Так как  $X$  неприводимо, то  $I(X)$  прост, откуда  $A(X)$  целостно.

При этом неприводимые компоненты  $A(X \cap Z(f))$  — максимальные неприводимые замкнутые подмножества — соответствуют минимальным простым идеалам  $A(X \cap Z(f))$ , которые в свою очередь отвечают минимальным простым идеалам  $A(X)$ , содержащим образ  $f$ . Если образ  $f$  внутри  $A(X)$  обратим, то этих идеалов нет (с геометрической точки зрения, пересечение  $X \cap Z(f)$  пусто). Иначе  $f$  необратим, и применимо следствие 1: ясно, что если неприводимая компонента  $X \cap Z(f)$  отвечает простому идеалу  $\mathfrak{p} \supset (f)$ , то её размерность равна размерности её координатного кольца  $A(X)/\mathfrak{p}$ .  $\square$

Отсюда получаем вот такое следствие:

**Предложение 6.** *Пусть  $X$  неприводимо. Тогда все неприводимые компоненты  $Z(I(X) + (f_1, \dots, f_m))$  имеют размерность хотя бы  $\dim X - m$ .*

**Следствие 3.** *Пусть  $f_1, \dots, f_m \in \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ ,  $m < n$  и  $f_1(0) = \dots = f_m(0) = 0$ . Тогда система*

$$\begin{cases} f_1 = 0 \\ \vdots \\ f_m = 0 \end{cases}$$

*имеет ненулевое решение.*

*Доказательство.* Пространство переменных — аффинное пространство  $\mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n$ . Пространство решений — замкнутое множество  $Z(f_1, \dots, f_m)$ . По условию  $(0, \dots, 0) \in Z(f_1, \dots, f_m)$ .

В силу предыдущего предложения (применённого к  $X = \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n$ ), размерность компоненты  $Z(f_1, \dots, f_m)$ , содержащей  $(0, \dots, 0)$ , хотя бы 1, что согласно геометрическому определению размерности означает, что там есть ещё хотя бы одна точка (из неприводимости их даже бесконечно много).  $\square$

## 1.4 Регулярные функции

**Определение 11.** Будем говорить, что  $X$  — *квазиаффинное многообразие*, если  $X$  — открытое подмножество аффинного многообразия.

**Определение 12.** Пусть  $X \subset \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n$  — квазиаффинное. Будем говорить, что отображение  $f: X \rightarrow \mathbb{k}$  — регулярное в точке  $p$ , если существует окрестность  $U \subset X$ ,  $U \ni p$  и многочлены  $g, h \in A = \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$  такие, что

- $h$  не имеет нулей в  $U$ ,
- $f|_U = g/h$ .

Функция  $f: X \rightarrow \mathbb{k}$  называется *регулярной* на  $X$ , если она регулярна в каждой точке  $X$ .

Регулярные функции на  $X$  образуют кольцо, которое мы будем обозначать  $\mathcal{O}(X)$ .

*Замечание 5.* Например, все многочлены — регулярные функции на  $\mathbb{A}^n$ .

**Теорема 4.** *Пусть  $X$  — аффинное многообразие. Тогда*

$$\mathcal{O}(X) \cong A(X) = \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]/I(X).$$

*Доказательство.* Сначала отметим, что каждый многочлен очевидно определяет регулярную функцию на  $\mathbb{A}^n$ , а значит и на  $X$ . Так мы строим гомоморфизм

$$\alpha: \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n] \rightarrow \mathcal{O}(X), \quad f \mapsto f.$$

Но, его ядро — это в точности  $I(X)$ :

$$\text{Ker } \alpha = \{f \in \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n] : f|_X = 0\} = I(X).$$

Значит, у нас есть инъективный гомоморфизм  $A(X) \hookrightarrow \mathcal{O}(X)$ . Покажем, что он сюръективен.

Рассмотрим  $f \in \mathcal{O}(X)$ . По определению, у любой точки  $x \in X$  существует окрестность  $U_x$  и многочлены  $p_x, q_x$  такие, что  $q_x f = p_x$  в  $U_x$ , причём  $q_x$  не обращается в 0 на  $U_x$ . Так как  $X \setminus U_x$  замкнуто,  $X \setminus U_x = Z(\mathfrak{a})$  для некоторого идеала  $\mathfrak{a} \trianglelefteq \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$  и легко видеть, что

$$Z(\mathfrak{a}) \subset X = Z(I(X)) \implies I(X) \subset \mathfrak{a}.$$

Значит, если мы возьмём  $s \in \mathfrak{a} \setminus I(X)$ , мы получим, что

$$s \cdot q_x \cdot f = s \cdot p_x \quad \text{на всём } X, \text{ так как}$$

- $s \in \mathfrak{a} = I(X \setminus U_x)$ , что значит, что  $s|_{X \setminus U_x} = 0$  и на  $X \setminus U_x$  это равенство превращается в  $0 = 0$ .
- А на  $U_x$  это равенство получается домножением  $q_x f = p_x$  на  $s$ .

Причём, выберем  $s$  так, чтобы  $s(x) \neq 0$ . Мы можем так сделать, так как если нет, то

$$\begin{cases} \forall s \in \mathfrak{a} \setminus I(X) \quad s(x) = 0 \\ \forall s \in I(X) \quad s(x) = 0 \end{cases} \implies \forall s \in \mathfrak{a} \quad s(x) = 0,$$

но отсюда получается, что  $x \in Z(\mathfrak{a}) = X \setminus U_x$  (а это абсурдно).

Итак, выбрав такой  $s$ , мы построили для любой точки  $x$  многочлены  $p'_x$  и  $q'_x$  такие, что

$$\forall y \in X \quad q'_x(y)f(y) = p'_x(y) \text{ и } q'_x(x) \neq 0.$$

Теперь рассмотрим идеал  $\sum_{x \in X} (q'_x) + I(X)$  в кольце  $\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$  и покажем, что он совпадает со всем кольцом. Предположим противное, то есть он содержится в некотором максимальном идеале  $\mathfrak{m} \in \text{Spec}(\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n])$ . Но в таком случае

$$Z\left(\sum_{x \in X} (q'_x) + I(X)\right) \supset Z(\mathfrak{m}) = \text{pt} \in \mathbb{A}^n \implies \forall x \in X : q'_x(\text{pt}) = 0, \quad \forall h \in I(X) : h(\text{pt}) = 0.$$

Это даёт противоречие, так как

- Если  $\text{pt} \notin X$ , то не может быть такого, что  $\forall h \in I(X) : h(\text{pt}) = 0$ .
- Если же  $\text{pt} \in X$ , то по построению  $q'_{\text{pt}}(\text{pt}) \neq 0$ .

Итак, мы показали, что

$$\sum_{x \in X} (q'_x) + I(X) = (1) \implies \sum_{x \in X} (\overline{q'_x}) = (\overline{1}) \text{ в } A(X),$$

откуда существуют  $\overline{\ell_{x_i}} \in A(X)$  такие, что

$$\sum_{i=1}^N \overline{\ell_{x_i}} \cdot \overline{q'_{x_i}} = \overline{1} \quad \text{на } X.$$

Но, ранее мы показали, что  $q'_x \overline{f} = p'_x$  на  $X$ . Домножая сумму выше на  $f$ , мы получаем, что

$$\sum_{i=1}^N \overline{\ell_{x_i}} \cdot \overline{p'_{x_i}} = \overline{f} \in A(X).$$

Таким образом, мы построили для каждой регулярной функции прообраз в  $A(X)$ .  $\square$

**Предложение 7.** Регулярная функция  $f: X \rightarrow \mathbb{k}$  непрерывна, если отождествить  $\mathbb{k}$  с  $\mathbb{A}^1$  с топологией Зарисского.

*Доказательство.* Докажем сначала такую лемму из общей топологии:

**Лемма 2.** Пусть  $X$  — топологическое пространство,  $T \subset X$ , а  $U_i$  — открытое покрытие  $X$ . Утверждается, что  $T$  замкнуто в  $X$  тогда и только тогда, когда  $\forall i: T \cap U_i$  замкнуто в  $U_i$ .

*Доказательство.* В самом деле,

$$V = X \setminus T = \bigcup_i (U_i \setminus T) = \bigcup_i \underbrace{(U_i \setminus (T \cap U_i))}_{\text{открытое}}. \quad \square$$

Достаточно показать, что прообраз замкнутого множества замкнут. Как мы видели, замкнутые множества в  $\mathbb{A}^1$  — конечные наборы точек, поэтому достаточно показать, что

$$\forall a \in \mathbb{k} \quad f^{-1}(a) = \{P \in X \mid f(P) = a\} \text{ — замкнуто.}$$

Как мы видели в лемме, это достаточно проверять локально. Пусть  $U$  — открытое множество, на котором  $f$  можно представить в виде  $g/h$ , где  $g, h \in \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$  и  $h$  не имеет нулей в  $U$ . Тогда

$$f^{-1}(a) \cap U = \{P \in U \mid g(P)/h(P) = a\}, \quad \text{но } g(P)/h(P) = a \iff (g - ah)(P) = 0,$$

откуда  $f^{-1}(a) \cap U = Z(g - ah) \cap U$  — замкнуто в  $U$ .  $\square$

## 1.5 Морфизмы алгебраических многообразий

**Определение 13.** Пусть  $X, Y$  — квазиаффинные многообразия;  $\varphi: X \rightarrow Y$  — морфизм, если

1.  $\varphi$  непрерывно;
2. Для каждого открытого  $V \subset Y$  и каждой регулярной функции  $f: V \rightarrow \mathbb{k}$  её пуллбек  $\varphi^*(f) = f \circ \varphi: \varphi^{-1}(V) \rightarrow \mathbb{k}$  — регулярная функция.

*Замечание 6.* В частности, теперь у нас определено понятие изоморфизма многообразий. Отметим, что изоморфизм обязательно является биективным и непрерывным в обе стороны морфизмом, однако биективный и бинепрерывный морфизм может и не быть изоморфизмом.

**Предложение 8.** Квазиаффинные многообразия (и морфизмы, определенные как в 13) образуют категорию, которую мы будем обозначать  $\mathbf{qAff}_{\mathbb{k}}$ .

**Предложение 9.** Пусть  $X$  — квазиаффинное многообразие,  $Y \subset \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n$  — тоже квазиаффинное многообразие. В таком случае  $\psi: X \rightarrow Y$  является морфизмом в точности тогда и только тогда, когда функции

$$\psi^*(x_i): X \xrightarrow{\psi} Y \xrightarrow{x_i} \mathbb{k}$$

являются регулярными на  $X$ .

*Доказательство.* Если  $\psi$  — морфизм, то эти функции регулярны просто по определению морфизма. Теперь докажем утверждение в обратную сторону.

Покажем непрерывность. Возьмём замкнутое  $T \subset Y$  и проверим, что  $\psi^{-1}(T)$  замкнуто. Достаточно проверить это локально, то есть в окрестности любой точки. Возьмём произвольную точку  $x \in X$  и докажем, что существует такая окрестность  $U_x \ni x$ , что  $U_x \cap \psi^{-1}(T)$  замкнуто в  $U_x$ .

Так как функции  $\psi^*(x_i): X \rightarrow \mathbb{k}$  регулярны, то в некоторой окрестности<sup>4</sup>  $x$  мы можем представить отображение  $\psi$  в виде

$$(x_1, \dots, x_m) \mapsto \left( \frac{f_1(x_1, \dots, x_m)}{g_1(x_1, \dots, x_m)}, \dots, \frac{f_n(x_1, \dots, x_m)}{g_n(x_1, \dots, x_m)} \right)$$

Если  $T$  задаётся многочленами  $F_1, \dots, F_k$ , то есть  $T = \{y \in Y \mid F_1(y) = \dots = F_k(y) = 0\}$ , то

$$\psi^{-1}(T) \cap U_x = \left\{ (x_1, \dots, x_m) \mid F_1 \left( \frac{f_1}{g_1}(x_1, \dots, x_m), \dots, \frac{f_n}{g_n}(x_1, \dots, x_m) \right) = \dots = 0 \right\},$$

откуда  $\psi^{-1}(T) \cap U_x$  замкнуто в  $U_x$ .

Теперь надо проверить второе условие. Его также можно проверять локально. Возьмём открытое  $U \subset Y$  и рассмотрим на нём регулярную функцию  $f$ . Покажем, что  $f \circ \psi$  регулярна на  $\psi^{-1}(U)$ . Мы можем покрыть  $U$  окрестностями, на которых  $f$  представляется, как отношение многочленов: пусть  $U = \bigcup U_i$  и

$$f|_{U_i} = \frac{g_i}{h_i}.$$

Теперь достаточно доказать, что  $\psi^*(f|_{U_i})$  регулярны на  $\psi^{-1}(U_i)$ , а для этого достаточно доказать, что  $\psi^*(g_i)$  и  $\psi^*(h_i)$  регулярны. Но, это очевидно, так как по условию  $\psi^*(x_i)$  регулярны, а  $g_i$  и  $h_i$  — многочлены от  $x_i$ .  $\square$

## 1.6 Антиэквивалентность $\mathbf{Aff}^{\text{op}} \cong \mathbb{k}\text{-Alg}$

**Предложение 10.** *Пусть  $X, Y$  — многообразия, причем  $Y$  — аффинное. Имеется естественное биективное отображение (изоморфизм бифункторов)*

$$\text{Hom}_{\mathbf{qAff}}(X, Y) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathbb{k}\text{-Alg}}(A(Y), \mathcal{O}(X)).$$

*Естественность тут понимается в обычном смысле: а именно, если у нас есть морфизм  $X_1 \rightarrow X_2$ , то мы получим коммутативную диаграмму:*

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathbf{qAff}}(X_2, Y) & \xleftarrow{\sim} & \text{Hom}_{\mathbb{k}\text{-Alg}}(A(Y), \mathcal{O}(X_2)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Hom}_{\mathbf{qAff}}(X_1, Y) & \xleftarrow{\sim} & \text{Hom}_{\mathbb{k}\text{-Alg}}(A(Y), \mathcal{O}(X_1)) \end{array}$$

*И, если же у нас есть морфизм  $Y_1 \rightarrow Y_2$ , то мы получим коммутативную диаграмму:*

---

<sup>4</sup>Достаточно взять окрестность из определения для каждой из координат и пересечь их.

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}_{\mathbf{q}\mathbf{Aff}}(X, Y_1) & \xleftarrow{\sim} & \mathrm{Hom}_{\mathbf{k}\text{-}\mathbf{Alg}}(A(Y_1), \mathcal{O}(X)) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{Hom}_{\mathbf{q}\mathbf{Aff}}(X, Y_2) & \xleftarrow{\sim} & \mathrm{Hom}_{\mathbf{k}\text{-}\mathbf{Alg}}(A(Y_2), \mathcal{O}(X))
\end{array}$$

*Доказательство.* Пусть задан морфизм  $\varphi: X \rightarrow Y$ , он переводит регулярные функции на  $Y$  в регулярные функции на  $X$  (при помощи пуллбека). Значит, он индуцирует отображение  $\varphi^*: \mathcal{O}(Y) \rightarrow \mathcal{O}(X)$ :

$$f \in \mathcal{O}(Y), \quad f \mapsto \varphi^*(f) \in \mathcal{O}(X).$$

Совершенно ясно, что это отображение является гомоморфизмом  $\mathbb{k}$ -алгебр. По теореме 4,  $\mathcal{O}(Y) \cong A(Y)$ , так что мы получаем гомоморфизм  $A(Y) \rightarrow \mathcal{O}(X)$ .

Теперь построим обратное отображение. Пусть задан гомоморфизм  $\mathbb{k}$ -алгебр  $h: A(Y) \rightarrow \mathcal{O}(X)$ .  $Y$  — аффинное, так что  $A(Y) = \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]/I(Y)$ . Рассмотрим  $\xi_i = h(\bar{x}_i) \in \mathcal{O}(X)$ . Эти функции определены на всём  $X$ , так что мы можем определить отображение

$$\psi: X \rightarrow \mathbb{A}^n, \quad \psi(P) = (\xi_1(P), \dots, \xi_n(P)).$$

Покажем, что на самом деле  $\psi$  действует в  $Y$ . Так как  $Y = Z(I(Y))$ , достаточно показать, что  $\forall f \in I(Y), \forall P \in X : f(\psi(P)) = 0$ . Так как  $f$  — многочлен, а  $h$  — гомоморфизм  $\mathbb{k}$ -алгебр,

$$f(\psi(P)) = f((\xi_1(P), \dots, \xi_n(P))) = h(f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n))(P) = 0,$$

так как  $f \in I(Y)$ . Так по гомоморфизму  $\mathbb{k}$ -алгебр  $h: A(Y) \rightarrow \mathcal{O}(X)$  мы построили отображение  $\psi: X \rightarrow Y$ . То, что  $\psi$  — морфизм, напрямую вытекает из предложения 9.

Дальше в качестве упражнения идёт проверка того, что построенные отображения  $\mathrm{Hom}_{\mathbf{q}\mathbf{Aff}}(X, Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbf{k}\text{-}\mathbf{Alg}}(A(Y), \mathcal{O}(X))$  взаимно обратны.

Естественность данного изоморфизма оставляется в качестве упражнения.  $\square$

Заметим, что если оба многообразия аффинные, то мы получаем соответствие (естественный изоморфизм)

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Aff}}(X, Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbf{k}\text{-}\mathbf{Alg}}(A(Y), A(X)).$$

То есть, мы получаем (контравариантный) функтор  $\mathbf{Aff}_{\mathbb{k}}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{k}\text{-}\mathbf{Alg}$  (где алгебры конечно порождённые и редуцированные<sup>5</sup>):

$$A: \mathbf{Aff}_{\mathbb{k}}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{k}\text{-}\mathbf{Alg}, \quad X \mapsto A(X).$$

Кроме того, мы видели, что есть и обратный функтор: если  $A \in \mathbf{k}\text{-}\mathbf{Alg}$ , то мы можем рассмотреть аффинное многообразие  $X'$  такое, что  $A(X') \cong A$  и сопоставить  $A \rightarrow X'$ . Например, можно представить  $A \cong \mathbb{k}[x_1, \dots, x_N]/I$ , и тогда  $X' = Z(I) \subset \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^N$ .

Этот функтор задан корректно, в частности, если взять другое многообразие  $X$  такое, что  $A(X) \cong A(X')$ , то изоморфизм алгебр будет индуцировать и изоморфизм многообразий  $X \cong X'$  (так как функтор переводит изоморфизмы в изоморфизмы).

Таким образом, мы доказали такую теоремы:

<sup>5</sup>Других в этом конспекте не встретится.

**Теорема 5.** Категория аффинных многообразий  $\mathbf{Aff}$  антиэквивалентна категории конечно порождённых редуцированных  $\mathbb{k}$ -алгебр.

Переводя это на существенно менее изысканный язык, мы получаем такое следствие

**Следствие 4.** Аффинные многообразия  $X$  и  $Y$  изоморфны тогда и только тогда, когда их аффинные координатные кольца  $A(X)$  и  $A(Y)$  изоморфны как  $\mathbb{k}$ -алгебры.

## 1.7 Рациональные функции

**Определение 14.** Пусть  $X$  — неприводимое аффинное многообразие,  $U, V$  — непустые открытые подмножества, а  $f$  и  $g$  — регулярные функции на  $U$  и  $V$  соответственно. В таком случае будем говорить, что  $(U, f) \sim (V, g)$  если  $f = g$  на  $U \cap V$ .

Класс эквивалентности по этому отношению мы будем называть *рациональной функцией*.

*Областью определения* данной рациональной функции называется объединение всех  $U$  таких, что данная функция эквивалентна  $(U, f)$  для некоторой  $f : U \rightarrow \mathbb{k}$ .

*Замечание 7.* Множество всех рациональных функций на  $X$  образует поле, которое мы будем обозначать через  $\mathbb{k}(X)$ .

Проверим, что это в самом деле поле. Так как  $X$  неприводимо, любые два непустых открытых подмножества  $X$  имеют непустое пересечение (по 1), и мы можем определить сложение и умножение, превратив  $\mathbb{k}(X)$  в кольцо. Кроме того, если  $(U, f) \in K(X)$  и  $f \neq 0$ , то мы можем ограничить  $f$  на открытое множество  $V = U \setminus (U \cap Z(f))$ , на котором  $f$  не имеет нулей, и тогда  $1/f$  регулярна на  $V$ , и пара  $(V, 1/f)$  будет обратным элементом к  $(U, f)$ .

Отметим, что для неприводимого аффинного многообразия  $X$  определение поля рациональных функций  $\mathbb{k}(X)$  можно дать несколько иначе по сравнению с определением 14.

Так как  $X$  неприводимо, то координатное кольцо  $A(X)$  целостно, и мы можем рассматривать его поле частных. Кроме того, рассматривая очевидное (инъективное) отображение

$$A(X) \rightarrow \mathbb{k}(X).$$

мы получаем и вложение полей  $\text{Frac}(A(X)) \hookrightarrow \mathbb{k}(X)$ . Вложение полей инъективно всегда; сюръективность следует из определения регулярной функции: на некоторой окрестности  $U \subset X$  регулярная функция представима в виде частного многочленов  $g/h$ , значит, она эквивалентна рациональной функции  $(U, g/h)$ , которая безусловно лежит в образе  $\text{Frac}(A(X))$ . Тем самым, это изоморфизм.

## 1.8 Главные аффинные окрестности

**Определение 15.** Главным открытыми множествами (или, аффинными окрестностями) в  $\mathbb{A}^n$  называют множества вида

$$D(f) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{A}^n \setminus Z(f),$$

где  $f$  — некоторый многочлен из  $\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ .

Пусть  $X$  — аффинное многообразие,  $\bar{f} \in A(X) = \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]/I(X)$ . Определим

$$D(\bar{f}) \stackrel{\text{def}}{=} D(f) \cap X = X \setminus Z(\bar{f}).$$

Ясно, что определение корректно, так как утверждение  $f(x) = 0$  для точки  $x \in X$  не зависит от выбора представителя  $f$  класса  $\bar{f}$ .

Замечание 8. Ясно, что если  $f = 1$ , то  $D(f) = \mathbb{A}^n$ , откуда  $D(\bar{f}) = X$ .

Для краткости обозначим  $A = A(X)$  и рассмотрим главную локализацию

$$A_{\bar{f}} = S^{-1}A, \text{ где } S = \{\bar{f}^n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Замечание 9. Отметим, что возможен случай, когда  $A_{\bar{f}} = 0$ , но тогда  $\exists k: \bar{f}^k = 0$ , а так как  $I(X)$  — радикальный идеал, это равносильно тому, что  $\bar{f} = 0$ , что равносильно тому, что  $f \in I(X)$ , то есть

$$D(\bar{f}) = X \setminus Z(\bar{f}) = \emptyset.$$

В случае, когда  $D(\bar{f}) \neq \emptyset$ , мы получаем гомоморфизм колец

$$A_{\bar{f}} \rightarrow \mathcal{O}(D(\bar{f})), \quad \frac{\bar{a}}{\bar{f}^k} \mapsto \text{функция } \frac{\bar{a}}{\bar{f}^k}$$

- Этот гомоморфизм инъективен:

$$\frac{\bar{a}}{\bar{f}^k} \Big|_{D(\bar{f})} = 0 \implies \bar{a}|_{D(\bar{f})} = 0 \implies \bar{a} \cdot \bar{f}|_X = 0 \implies af \in I(X) \implies \bar{a}\bar{f} = 0 \in A(X),$$

откуда  $\bar{a}/\bar{f}^k = 0$  в локализации  $A(X)_{\bar{f}}$ .

- Кроме того, он сюръективен. Пусть  $r \in \mathcal{O}(D(\bar{f}))$ , то есть

$$\forall x \in D(\bar{f}) \quad \exists \text{ окрестность } U_x \ni x, \bar{g}_x, \bar{h}_x \in A(X): r\bar{h}_x = \bar{g}_x \text{ на } U_x$$

и  $h_x$  не имеет нулей в  $U_x$ .

Выбирая многочлен  $s_x \in A(X)$ , не равный нулю в точке  $x$ , но обращающийся в ноль на дополнении  $D(\bar{f})$ , мы можем полагать, что наше равенство выполнено на всём  $X$  (см. доказательство теоремы 4). Не умаляя общности, будем считать так изначально.

- Заметим, что

$$Z\left(\sum_{x \in D(\bar{f})} (h_x) + I(X)\right) \subset Z(f),$$

так как если  $y \in Z\left(\sum_{x \in D(\bar{f})} (h_x) + I(X)\right)$ , то  $y \in X \setminus D(\bar{f}) = X \cap Z(f)$ .

- Получается,

$$\sqrt{(f)} \subset \sqrt{\sum_{x \in D(\bar{f})} (h_x) + I(X)} \implies f^m \in \sum_{x \in D(\bar{f})} (h_x) + I(X) \implies \bar{f}^m \in \sum_{x \in D(\bar{f})} (h_x)$$

Значит, мы можем представить  $\bar{f}^m$  в виде

$$\bar{f}^m = \sum_{i=1}^N \bar{h}_{x_i} \cdot \bar{\ell}_i, \quad x_i \in D(\bar{f}).$$

Наконец, домножая это равенство на  $r$  мы получаем

$$\bar{f}^m r = \sum_{i=1}^N \overline{g_{x_i} \ell_{x_i}} \implies r = \frac{\bar{a}}{\bar{f}^m} \in A_{\bar{f}}.$$

Таким образом, мы доказали такое предложение:

**Предложение 11.**  $A(X)_{\bar{f}} \cong \mathcal{O}(D(\bar{f}))$ .

Полезно также рассмотреть альтернативное доказательство этого факта.

*Альтернативное доказательство предложения 11.* Рассмотрим отображение

$$A_{\bar{f}} \xrightarrow{\sim} A[t]/(\bar{f}t - 1), \quad \frac{a}{\bar{f}^k} \mapsto \bar{a}t^k.$$

Это изоморфизм, в чём легко убедиться, используя универсальные свойства, определяющие локализацию и кольцо многочленов. Кроме того,

$$A = \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]/I(X) \implies A[t]/(\bar{f}t - 1) \cong \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n, t]/(I(x) + (\bar{f}t - 1)),$$

откуда видно, что  $A_{\bar{f}}$  — это координатное кольцо многообразия

$$Y = \{(x_1, \dots, x_n, t) \in \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^{n+1} \mid (x_1, \dots, x_n) \in X, \quad f(x_1, \dots, x_n)t - 1 = 0\}.$$

Рассмотрим коммутативную диаграмму колец:

$$\begin{array}{ccc} A(X)_{\bar{f}} & \xrightarrow{\sim} & A(X)[t]/(\bar{f}t - 1) \\ \downarrow & & \downarrow \sim \\ \mathcal{O}(D(\bar{f})) & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{O}(Y) \end{array}$$

Нижняя горизонтальная стрелка получается из того, что  $Y \xrightarrow{\sim} D(\bar{f})$  посредством (взаимно обратных) отображений

$$(x_1, \dots, x_n, t) \mapsto (x_1, \dots, x_n), \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_n, 1/f(x_1, \dots, x_n))$$

Так как горизонтальные и правая вертикальная стрелка — изоморфизмы, левая вертикальная стрелка — тоже изоморфизм.  $\square$

## 1.9 Эквивалентные определения размерности неприводимого аффинного многообразия

**Предложение 12.** Пусть  $X$  — неприводимое квазиаффинное многообразие,  $U \subset X$  — открытое подмножество. В таком случае  $\dim U = \dim X$ .

*Доказательство.* **I.** Пусть  $X$  — аффинное. Так как  $U$  открытое,

$$\begin{aligned} U = X \setminus Z(\overline{f_1}, \dots, \overline{f_n}) &\supset X \setminus Z(\overline{f_1}) = D(\overline{f_1}) \implies D(\overline{f_1}) \subset U \subset X \implies \\ &\implies \dim D(\overline{f_1}) \leq \dim U \leq \dim X. \end{aligned}$$

Но, как мы знаем из предложения 11 и теоремы 2,  $\dim D(\overline{f_1}) = \dim A(X)_{\overline{f_1}} = \text{tr. deg}_{\mathbb{k}} \text{Frac}(A(X)_{\overline{f_1}})$ . Осталось заметить, что поля частных  $A(X)_{\overline{f_1}}$  и  $A(X)$  совпадают, откуда мы заключаем, что  $\dim U = \dim X$ .

**II.** Пусть  $X$  квазиаффинное. Имеют место включения  $U \subset X \subset \overline{X}$ , где  $\overline{X}$  — аффинное. Так как  $U$  — открытое подмножество  $\overline{X}$ , по пункту I мы имеем

$$\dim U = \dim \overline{X}.$$

С другой стороны,  $\dim U \leq \dim X \leq \dim \overline{X}$ , откуда мы получили нужное.  $\square$

*Замечание 10.* Пусть  $X$  — квазиаффинное многообразие. Тогда  $\dim X$  — наибольшая из размерностей его неприводимых компонент.

## 1.10 Прямое произведение многообразий и его первые приложения

Пусть  $X \subset \mathbb{A}^m$ ,  $Y \subset \mathbb{A}^n$  — аффинные многообразия. Пусть  $X = Z(f_1, \dots, f_k)$ ,  $Y = Z(g_1, \dots, g_\ell)$ , тогда

$$X \times Y = \{(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) \mid f_i(x_1, \dots, x_m) = 0, g_j(y_1, \dots, y_n) = 0 \ \forall i, j\}.$$

То есть, прямое произведение естественно снабжается структурой аффинного многообразия в  $\mathbb{A}^{m+n}$ . Позже мы докажем, что это произведение в категорном смысле.

Также видно, что если  $X$  и  $Y$  — квазиаффинные, то их прямое произведение тоже квазиаффинное.

**Предложение 13.** *Пусть  $X \subset \mathbb{A}^m$ ,  $Y \subset \mathbb{A}^n$  — неприводимые аффинные многообразия, тогда  $X \times Y$  — неприводимое аффинное многообразие в  $\mathbb{A}^m \times \mathbb{A}^n$ .*

*Доказательство.* Предположим противное, то есть, что

$$X \times Y = Z_1 \cup Z_2, \quad Z_i \neq X \times Y.$$

Ясно, что  $\forall x \in X : \{x\} \times Y \cong Y$  — неприводимое, откуда  $\{x\} \times Y \subset Z_1$  или  $\{x\} \times Y \subset Z_2$ . Но отсюда

$$X = X_1 \cup X_2, \quad X_j = \{x \mid \{x\} \times Y \subset Z_j\}.$$

Покажем, что множества  $X_1$  и  $X_2$  замкнутые. Для этого достаточно заметить, что

$$X_1 = \bigcap_{y \in X} X_y, \quad \text{где } X_y = \{x \in X \mid (x, y) \in Z_1\},$$

а  $X_y$  — замкнуты, так как если  $Z_1 = Z(f_1(x, y), \dots, f_k(x, y))$ , то

$$X_{\tilde{y}} = Z(f_1(x, \tilde{y}), \dots, f_k(x, \tilde{y})).$$

В дальнейшем мы увидим, что вложение  $X \rightarrow X \times Y, x \mapsto (x, \tilde{y})$  непрерывно, откуда сразу будет следовать, что  $X_{\tilde{y}}$  замкнуто — это прообраз  $Z_1$  при таком вложении.

Так или иначе, мы приходим к противоречию, так как из неприводимости  $X$  следует, что  $X \subset X_1$  или  $X \subset X_2$ , откуда  $X \times Y = Z_1$  или  $X \times Y = Z_2$  (что противоречит нашему предположению).  $\square$

**Предложение 14.** *Пусть  $X, Y$  — неприводимые аффинные многообразия. Тогда  $\dim(X \times Y) = \dim X + \dim Y$ .*

*Доказательство.* Пусть  $\dim X = r$ ,  $\dim Y = s$ . Поле функций  $\mathbb{k}(X)$  порождается ровно  $r$  алгебраически независимыми координатными функциями  $u_1, \dots, u_r$ . Аналогично,  $\mathbb{k}(Y)$  порождается координатными функциями  $v_1, \dots, v_s$  и они алгебраически независимы. Совершенно ясно, что

$$\dim(X \times Y) = \text{trdeg}(\mathbb{k}(X \times Y)) \leq r + s.$$

Остаётся показать, что система  $(u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_s)$  будет алгебраически независимой в  $\mathbb{k}(X \times Y)$ .

Предположим, что

$$\sum f_{i_1 i_2 \dots i_r}(v_1, \dots, v_s) u_1^{i_1} \cdot \dots \cdot u_r^{i_r} = 0.$$

Подставляя  $a_i \in \mathbb{k}$ , мы получаем полиномиальное соотношение на  $u_i$ :

$$\sum f_{i_1 i_2 \dots i_r}(a_1, \dots, a_s) u_1^{i_1} \cdot \dots \cdot u_r^{i_r} = 0,$$

а так как  $u_i$  алгебраически независимы, отсюда следует, что  $f_{i_1 \dots i_r}(a_1, \dots, a_s) = 0$ . По произвольности набора  $a_1, \dots, a_s$ , мы получаем, что  $f_{i_1 i_2 \dots i_r}(v_1, \dots, v_s) = 0$ , но так как  $v_i$  алгебраически независимы, отсюда следует, что  $f_{i_1 \dots i_r} = 0$ , что и требовалось.  $\square$

*Замечание 11.* Здесь мы по существу использовали, что для аффинных  $\mathbb{k}(X) = \text{Frac}(A(X))$ .

Обсудим, что происходит в случае приводимых многообразий. Если

$$X = \bigcup_i X_i, Y = \bigcup_j Y_j \quad X_i, Y_j — \text{неприводимые},$$

то  $\dim X = \max \dim X_i$ , а  $\dim Y = \max \dim Y_j$ . Несложно предъявить разложение  $X \times Y$  в неприводимые:

$$X \times Y = \bigcup X_i \times Y_j$$

Таким образом, мы получили, что

**Предложение 15.** *Пусть  $X, Y$  — многообразия, тогда  $\dim(X \times Y) = \dim X + \dim Y$ .*

**Теорема 6.** *Пусть  $Y, Z \subset \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n$  — неприводимые аффинные многообразия,  $\dim Y = r$ ,  $\dim Z = s$ . Тогда любая компонента  $Y \cap Z$  имеет размерность  $\geq r + s - n$ .*

*Доказательство.* Рассмотрим диагональное вложение

$$\Delta: \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^n = \mathbb{A}^{2n}, \quad x \mapsto (x, x).$$

Образ  $\Delta(\mathbb{A}^n)$  замкнут в  $\mathbb{A}^{2n}$ , так как он задаётся вот такой системой уравнений:

$$\begin{cases} y_1 = y_{n+1} \\ y_2 = y_{n+2} \\ \vdots \\ y_n = y_{2n} \end{cases} \quad (1)$$

Заметим, что имеет место изоморфизм

$$Y \cap Z \xrightarrow{\sim} \Delta(\mathbb{A}^n) \cap (Y \times Z).$$

Так как при изоморфизме неприводимые компоненты переходят в неприводимые компоненты, размерности неприводимых компонент левой и правой частей равны. Заметим, что  $\Delta(\mathbb{A}^n)$  — пересечение  $n$  гиперповерхностей (как видно из 1). Пользуясь теоремой 6 (и тем фактом, что  $\dim Y \times Z = r + s$ ), мы получаем нужное.  $\square$

Заметим, что в процессе доказательства мы установили, что  $D(\bar{f})$  изоморфно аффинному подмногообразию в  $\mathbb{A}^{n+1}$ .

**Упражнение 1.** Если  $X, Y$  — аффинные, то  $A(X \times Y) \cong A(X) \otimes_{\mathbb{k}} A(Y)$ .

*Замечание 12.* Из упражнения выше следует, что над алгебраически замкнутым полем тензорное произведение целостных конечно порождённых алгебр — целостная конечно порождённая алгебра. Если поле не алгебраически замкнутое, то это не обязательно так.

## 1.11 О количестве порождающих идеала

Для алгебраического многообразия  $X \subset \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n$  разумно задать вопрос о минимальном количестве образующих, задающих идеал  $I(X) \trianglelefteq \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ . Будем считать, что  $X$  неприводимо, то есть  $I(X) \trianglelefteq \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$  прост.

- Если  $X \subset \mathbb{A}^1$ , то любой идеал в  $\mathbb{k}[x]$  главный, откуда достаточно одной образующей.
- В  $\mathbb{A}^2$  есть идеалы высоты 0, 1, 2. Высоты 0 — только нулевой идеал, все идеалы высоты 1 — главные 1, а идеалы высоты 2 — максимальные, то есть  $(x_1 - a_1, x_2 - a_2)$ , отвечающие точкам.
- В  $\mathbb{A}^3$  для высоты 2 уже всё сложно:  $\forall n \in \mathbb{N} : \exists \mathfrak{p} \in \mathbb{k}[x, y, z]$ : число образующих  $\mathfrak{p}$  хотя бы  $n$ .

Сейчас мы докажем, однако, что любое многообразие в  $n$ -мерном аффинном пространстве можно задать  $n$  уравнениями, или как пересечение  $n$  гиперповерхностей. Это не противоречит написанному выше, так как данные  $n$  образующих будут задавать не сам идеал  $I(X)$ , а некоторый  $J$ , такой, что  $\sqrt{J} = I(X)$ .

**Лемма 3.** Пусть  $R$  — нётерово кольцо. Следующие условия верны:

1. Любой минимальный простой идеал состоит из делителей нуля.

2. Множество всех делителей нуля нётерова кольца  $R$  представляет собой объединение конечного числа простых идеалов  $\mathfrak{p}_i$ , а  $\mathfrak{p}_i = \text{Ann}(a_i)$  для некоторого  $a_i \in R$ .
3. Пусть  $R$  — нётерово кольцо, причем любой его элемент либо обратим, либо делитель нуля и вдобавок  $R$  редуцировано (т.е.  $\text{NRad}(R) = 0$ ). Тогда  $\dim R = 0$  (т.е.  $R$  — артиново кольцо).

*Доказательство.* Докажем сначала **первый пункт**. Пусть  $\mathfrak{p}$  — минимальный простой идеал. Так как в кольце  $R_{\mathfrak{p}}$  идеал  $\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$  максимальный, то

$$\text{NRad}(R_{\mathfrak{p}}) = \mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}.$$

Так  $R_{\mathfrak{p}}$  нётерово (локализация нётерова кольца нётерова), значит идеал конечно порождён:  $\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}} = (e_1, \dots, e_n)$ . Если  $\forall j : e_j^m = 0$ , то

$$\text{NRad}(R_{\mathfrak{p}})^{nm} = 0.$$

Значит,  $\forall a \in \mathfrak{p} : a^{nm} = 0$  в кольце  $R_{\mathfrak{p}}$ . Тогда  $\exists s \in \mathfrak{p} : a^N s = 0$  в  $R$ , значит  $a$  — делитель нуля.

**Второй** пункт был в курсе коммутативной алгебры — это факт про примарное разложение идеала  $0 \trianglelefteq R$ .

Теперь докажем **третий** пункт. Возьмём  $\mathfrak{m} \in \text{Spec} R$ , он полностью состоит из делителей нуля. По пункту 2:

$$\mathfrak{m} \subset \bigcup_{i=1}^m \mathfrak{p}_i \implies \mathfrak{m} \subset \mathfrak{p}_i \implies \mathfrak{m} = \mathfrak{p}_i.$$

Тем самым,  $\mathfrak{m} = \text{Ann}(a)$  для некоторого  $a \in R$ . Предположим, что существует  $\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{m}$ . Рассмотрим два случая:

1.  $a \in \mathfrak{m}$ . Значит,  $a \in \text{Ann}(a)$ , то есть  $a^2 = 0$ , но это противоречит тому, что  $\text{NRad}(R) = 0$ .
2.  $a \notin \mathfrak{m}$ . Возьмём  $b \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{p}$ . Заметим, что  $ab = 0$ , причём  $a \notin \mathfrak{p}, b \notin \mathfrak{p}$ . Получили противоречие с тем, что идеал  $\mathfrak{p}$  простой.  $\square$

**Теорема 7.** Пусть  $R$  — нётерово кольцо, а  $S = R[x]$ . Пусть  $\dim R = d - 1$ ,  $d \geq 1$ , а  $I \trianglelefteq S$ . Тогда  $\exists f_1, \dots, f_d \in I$ :

$$\sqrt{I} = \sqrt{(f_1, \dots, f_d)}.$$

*Доказательство.* Пусть  $d = 1$ , тогда  $\dim R = 0$  и  $R/\text{NRad}(R)$  — редуцированное артиново кольцо, то есть прямая сумма конечного числа полей

$$R/\text{NRad}(R) = K_1 \oplus K_2 \oplus \dots K_n.$$

С другой стороны, легко проверить, что  $\text{NRad}(R[x]) = \text{NRad}(R)[x]$ . Но тогда мы получаем, что

$$S/\text{NRad}(S) \cong K_1[x] \oplus \dots K_n[x],$$

а справа написано кольцо главных идеалов. В частности, идеал  $(I + \text{NRad}(S))/\text{NRad}(S)$  главный, пусть он порождается  $f \in I$ . То есть в кольце  $S$ :

$$I + \text{NRad}(S) = (f) + \text{NRad}(S) \implies \sqrt{I} = \sqrt{I + \text{NRad}(S)} = \sqrt{(f) + \text{NRad}(S)} = \sqrt{(f)}.$$

Поясним равенство  $\sqrt{I} = \sqrt{I + \text{NRad}(S)}$ . Включение  $(\subset)$  очевидно, докажем включение  $(\supset)$ . Пусть  $x \in \sqrt{I + \text{NRad}(S)}$ , тогда  $x^m = a + b$ , где  $a \in I$ ,  $b \in \text{NRad}(S)$ . Так как  $b^N = 0$  для некоторого  $N$ , а  $(x^m)^N \in I$ , то  $x \in \sqrt{I}$ .

Тем самым, база индукции доказана,  $\sqrt{I} = \sqrt{(f)}$ .

Сделаем теперь переход  $d - 1 \mapsto d$ . Так как при факторизации по  $\text{NRad}(R)$  размерность не меняется, а  $\sqrt{I} = \sqrt{I + \text{NRad}(S)}$ , то не умоляя общности мы можем полагать, что с самого начала кольцо редуцированное.

Рассмотрим  $U$  — множество всех не делителей нуля в  $R$ . Это мультиликативная система, можно рассмотреть локализацию  $U^{-1}R = R[U^{-1}]$ . Заметим, что в  $R[U^{-1}]$  любой элемент либо обратим, либо является делителем нуля. По лемме 3 это кольцо будет редуцированным нётеровым кольцом размерности 0, то есть произведением конечного числа полей. Тогда

$$S[U^{-1}] = \prod K_i[x],$$

в частности, это кольцо главных идеалов. Пусть  $I \cdot S[U^{-1}] = (f_1)$ , где  $f_1 \in I$ .

В силу конечной порождённости  $I \trianglelefteq S$ ,  $\exists r \in U: rI \subset (f_1) \trianglelefteq S^6$ . Так как  $r$  — не делитель нуля, то он не лежит в объединении всех минимальных простых идеалов кольца  $R$  (тут мы вновь пользуемся леммой 3). Перейдём к фактору и покажем, что

$$\dim R/(r) \leq d - 2$$

Пойдём от противного: пусть  $\dim R/(r) \geq d - 1$ , то есть имеется цепочка

$$\mathfrak{p}_0/(r) \subsetneq \mathfrak{p}_1/(r) \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{p}_{d-1}/(r).$$

Поднимаясь к исходному кольцу, мы получаем такую цепочку:

$$(r) \subset \mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{p}_{d-1}.$$

Теперь видно, что идеал  $\mathfrak{p}_0$  не может быть минимальным (так как  $r$  не лежит ни в каком минимальном), а значит, мы можем увеличить цепочку и получить противоречие.

Теперь мы можем применить к кольцу  $R/(r)$  индукционное предположение:  $\exists \overline{f_2}, \dots, \overline{f_d} \in I + (r)/(r)$ :

$$\sqrt{I + (r)/(r)} = \sqrt{(\overline{f_2}, \dots, \overline{f_d})}.$$

Можно считать, что  $f_2, \dots, f_d \in I$ . Теперь остается проверить только, что

$$\sqrt{I} = \sqrt{(f_1, \dots, f_d)}.$$

По построению  $f_1, f_2, \dots, f_d \in I$ , проверим включение в обратную сторону. Действительно, если  $x \in \sqrt{I}$ , то  $x^k \in I$ , а кроме того,  $\overline{x^m} \in \sqrt{(\overline{f_2}, \dots, \overline{f_d})} \cdot S/(r)$ , то есть  $x^m \in (r, f_2, \dots, f_d)$ .

Перемножая, получаем  $x^{k+m} \in x^m I \in (r, f_2, \dots, f_d)I$ , но так как  $rI \subset (f_1)$ , то  $x^{k+m} \in (f_1, \dots, f_d)$ .  $\square$

<sup>6</sup>Надо выразить образующие  $I$  в виде  $\frac{a_i}{r_i} \cdot f_1$ , где  $r_i \in U$ , и тогда в качестве  $r$  подойдёт произведение  $r_i$ . Стоит заметить, что локализация по  $U$  инъективна, так как в  $U$  нет делителей нуля.

Применим эту теорему.

Пусть  $X \subset \mathbb{A}^n$  — аффинное многообразие, тогда  $I(X) \subset S = \mathbb{k}[x_1, \dots, x_{n-1}][x_n] = R[x]$ ,  $\dim R = n - 1$ . По предыдущей теореме мы можем найти  $f_1, \dots, f_d$  такие, что

$$\sqrt{I(X)} = I(X) = \sqrt{(f_1, \dots, f_d)}.$$

Ясно, что  $X = Z(I) = Z(\sqrt{f_1, \dots, f_d}) = Z(f_1, \dots, f_d)$ , чего мы и хотели.

**Следствие 5.** В  $\mathbb{A}^n$  любое аффинное многообразие задаётся не более чем  $n$  уравнениями.

## 2 Проективные многообразия

### 2.1 Проективные многообразия

Пусть  $\mathbb{k}$  — наше базовое алгебраически замкнутое поле, определим проективное пространство  $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}_{\mathbb{k}}^n$ . Как множество, это, разумеется,  $(\mathbb{k}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim$  — кортежи, в которых хотя бы один элемент ненулевой, отфакторизованные по гомотетиям с коэффициентами из  $\mathbb{k}$ .

В этом контексте кольцо многочленов  $S = \mathbb{k}[x_0, x_1, \dots, x_n]$  мы будем рассматривать, как градуированное кольцо. Для этого вкратце напомним терминологию:

**Определение 16.** Кольцо  $S$  называется *градуированным*<sup>7</sup>, если оно обладает разложением в прямую сумму

$$S = \bigoplus_{d \geq 0} S_d$$

абелевых групп  $S_d$  таких, что  $S_d \cdot S_e \subset S_{d+e}$ , индекс  $d$  пробегает  $\mathbb{N}_0$ . Элементы из  $S_d$  мы будем называть *однородными степенями*  $d$ .

Идеал  $\mathfrak{a} \subset S$  мы будем называть *однородным*, если он представляется в виде

$$\mathfrak{a} = \bigoplus_{d \geq 0} (\mathfrak{a} \cap S_d).$$

Приведём несколько полезных фактов про однородные идеалы:

- Идеал однородный тогда и только тогда, когда он может быть порождён однородными элементами.
- Сумма, произведение, пересечение однородных идеалов, а также радикал однородного идеала однородны.
- Однородный идеал  $\mathfrak{a}$  простой тогда и только тогда, когда для любых двух однородных  $f, g$  из условия  $fg \in \mathfrak{a}$  следует, что либо  $f \in \mathfrak{a}$ , либо  $g \in \mathfrak{a}$ .

Кольцо  $S = \mathbb{k}[x_0, x_1, \dots, x_n]$  мы превратим в градуированное так: обозначим за  $S_d$  множество всех линейных комбинаций с коэффициентами из  $\mathbb{k}$  одночленов полной степени  $d$  (одночленов вида  $x_0^{d_0} \cdot \dots \cdot x_n^{d_n}$ , где  $d_0 + \dots + d_n = d$ ).

---

<sup>7</sup>Если точнее,  $\mathbb{N}_{\geq 0}$ -градуированным.

Кроме того, многочлены мы уже не можем рассматривать как функции на  $\mathbb{P}^n$  ввиду неоднозначности координатных представлений точек  $\mathbb{P}^n$ . Тем не менее, если  $f$  — однородный многочлен, то свойство  $f$  обращаться в 0 зависит только от класса эквивалентности  $(a_0, \dots, a_n)$ . Тем, самым, для однородного многочлена  $f$  имеет смысл говорить о множестве

$$Z(f) \stackrel{\text{def}}{=} \{P \in \mathbb{P}^n \mid f(P) = 0\}.$$

Соответственно, для любого множества  $T$  однородных элементов мы определяем

$$Z(T) \stackrel{\text{def}}{=} \{P \in \mathbb{P}^n \mid f(P) = 0 \quad \forall f \in T\}.$$

Если  $\mathfrak{a}$  — однородный идеал в  $S$ , то определим  $Z(\mathfrak{a})$ , как  $Z(\mathfrak{a}) = Z(T)$ , где  $T$  — множество всех однородных элементов из  $\mathfrak{a}$ . В силу нётеровости кольца  $S$  любое множество однородных элементов  $T$  содержит такое конечное подмножество  $f_1, \dots, f_r$ , что  $(T) = (f_1, \dots, f_r)$ .

**Определение 17.** Подмножество проективного пространства  $Y \subset \mathbb{P}^n$  называется *проективным алгебраическим многообразием*, если существует такое множество  $T \subset S$  однородных элементов, что  $Y = Z(T)$ .

Таким образом, мы можем задать на  $\mathbb{P}^n$  топологию Зарисского, объявив замкнутыми алгебраические многообразия.

**Определение 18.** Также, для любого  $Y \subset \mathbb{P}^n$  определим его *однородный идеал*  $I(Y) \subset S$ , как идеал, порождённый множеством однородных элементов  $f \in S$  таких, что  $f(P) = 0$  для всех  $P \in Y$ . *Однородное координатное кольцо*  $S(Y)$  проективного многообразия  $Y$  определим как факторкольцо  $S(Y) = S/I(Y)$ .

**Упражнение 2.** Пусть  $S = \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ , обозначим за  $S^h$  множество однородных многочленов. Докажите, что

1. Если  $T_1 \subset T_2 \subset S^h$ , то  $Z(T_2) \subset Z(T_1)$ .
2. Если  $Y_1 \subset Y_2 \subset \mathbb{P}^n$ , то  $I(Y_2) \subset I(Y_1)$ .
3.  $I(Y_1 \cup Y_2) = I(Y_1) \cap I(Y_2)$ .
4. Пусть  $I \subset S$  — однородный идеал,  $Z(I) \neq \emptyset$ . Тогда  $I(Z(I)) = \sqrt{I}$ .
5. Пусть  $I \subset S$  — однородный идеал. Тогда следующие условия равносильны:
  - (a)  $Z(I) = \emptyset$
  - (b)  $\sqrt{I} = (1)$  или  $\sqrt{I} = S^+ = \bigoplus_{d>0} S_d$
  - (c)  $S_d \subset I$  для некоторого  $d$ .

**Теорема 8** (Однородный Nullstelensatz). *Пусть  $I \subset \mathbb{k}[x_0, \dots, x_n]$  — однородный идеал, а  $f \in \mathbb{k}[x_0, \dots, x_n]$  — однородный элемент положительной степени. Если  $\forall P \in Z(I) \subset \mathbb{P}^n : f(P) = 0$ , то  $\exists m : f^m \in I$ .*

Это теорема легко сводится к аффинному случаю.

**Определение 19.** Квазипроективным многообразием мы будем называть открытое подмножество проективного многообразия.

Наша дальнейшая цель состоит в том, чтобы показать, что  $n$ -мерное проективное пространство обладает открытым покрытием, состоящим из  $n$ -мерных аффинных пространств. И, как весьма полезное следствие, что *всякое проективное/квазипроективное многообразие обладает открытым покрытием состоящим из аффинных многообразий* (это очень удобно, если мы доказываем что-то локально).

Пусть  $H_i = Z(x_i)$  — координатные гиперплоскости. Рассмотрим множества

$$U_i = \mathbb{P}^n \setminus H_i = \{(x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}^n \mid x_i \neq 0\}.$$

Совершенно ясно, что  $\mathbb{P}^n$  покрывается квазиаффинными  $U_i$  (так как у любой точки хотя бы одна из однородных координат отлична от нуля). Рассмотрим отображение

$$\varphi_i: U_i \rightarrow \mathbb{A}^n, \quad (a_0 : \dots : a_n) \mapsto \left( \frac{a_0}{a_i} : \dots : \frac{a_n}{a_i} \right).$$

Отметим, что это отображение определено корректно, так как частное  $a_j/a_i$  не зависит от выбора однородных координат.

**Предложение 16.** Отображение  $\varphi_i$  осуществляет гомеоморфизм  $U_i \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}^n$ .

*Доказательство.* Очевидно, что оно биективно. Достаточно показать, что замкнутые множества в  $U_i$  соответствуют замкнутым множествам в  $\mathbb{A}^n$ . Не умаляя общности,  $i = 0$ ,  $U_0 = U$ ,  $\varphi_0 = \varphi$ .

Пусть  $A = \mathbb{k}[y_1, \dots, y_n]$ . Рассмотрим отображения

$$\alpha: S^h \rightarrow A, \quad \alpha(f) = f(1, y_1, \dots, y_n), \quad \beta: A \rightarrow S^h, \quad \beta(g) = x_0^{\deg g} \cdot g\left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right).$$

Пусть  $Y \subset U$  — замкнутое подмножество. Тогда  $\bar{Y}$  (тут замыкание берётся в  $\mathbb{P}^n$ ) — проективное многообразие, то есть  $\bar{Y} = Z(T)$  для некоторого  $T \subset S^h$ . Положим  $T' = \alpha(T)$ . Непосредственно проверяется, что  $\varphi(Y) = Z(T')$ . И обратно, если  $W$  — замкнутое подмножество в  $\mathbb{A}^n$ , то  $W = Z(T')$  для некоторого  $T' \subset A$  и легко проверить, что

$$\varphi^{-1}(W) = Z(\beta(T')) \cap U.$$

Значит и  $\varphi$  и  $\varphi^{-1}$  замкнутые, что и требовалось. □

**Следствие 6.** Пусть  $Y$  — проективное (квазипроективное) многообразие. Тогда  $Y$  покрывается открытыми множествами  $Y \cap U_i$ , гомеоморфными аффинным (квазиаффинным) многообразиям, причем гомеоморфизм осуществляется определённым выше отображением  $\varphi_i$ .

*Замечание 13.* На самом деле, даже квазипроективное многообразие покрывается аффинными картами. Для доказательства этого утверждения надо вспомнить, что у каждой точки квазиаффинного многообразия имеется главная аффинная окрестность. В случае, если надо, из квазикомпактности этих окрестностей можно выбрать конечное количество.

**Определение 20.** Пусть  $X$  — квазипроективное многообразие. Функция  $f: X \rightarrow \mathbb{k}$  называется **регулярной** в точке  $P \in Y$ , если существует такая открытая окрестность  $U \subset X$  точки  $P$  и такие **однородные** многочлены  $g, h \in \mathbb{k}[x_0, \dots, x_n]$  **одной и той же степени**, что

- $h$  не имеет нулей в  $U$ .
- $f = g/h$  в  $U$ .

Функция  $f$  *регулярна на  $Y$* , если она регулярна в каждой точке  $Y$ .

*Замечание 14.* Отметим, что в этом случае сами  $g$  и  $h$  не являются функциями на  $\mathbb{P}^n$ , но вот их отношение (при  $h \neq 0$ ) определено корректно, так как они имеют одинаковую степень однородности.

**Пример 6.** Например, если  $X = U_0$ , то функция  $f(x_0, \dots, x_n) = x_1/x_0$  регулярна на  $X$ .

Определение морфизма на квазипроективные многообразия переносится без изменений:

**Определение 21.** Пусть  $X, Y$  — квазипроективные многообразия,  $\varphi: X \rightarrow Y$  — *морфизм*, если

1.  $\varphi$  непрерывно.
2. Для каждого открытого  $V \subset Y$  и каждой регулярной функции  $f: V \rightarrow \mathbb{k}$  её пуллбек  $\varphi^*(f) = f \circ \varphi: \varphi^{-1}(V) \rightarrow \mathbb{k}$  — регулярная функция.

**Предложение 17.** Пусть  $U_i \subset \mathbb{P}^n$  — определённое выше открытое множество. Отображение  $\varphi_i: U_i \rightarrow \mathbb{A}^n$  определённое выше является изоморфизмом.

*Доказательство.* Выше мы уже показали, что это отображение — гомеоморфизм. Теперь нужно показать, что на каждом открытом множестве регулярные функции этих многообразий совпадают. Регулярные функции на  $U_i$  локально представляются в виде отношений однородных многочленов от  $x_0, \dots, x_n$  одинаковой степени, а на  $\mathbb{A}^n$  — в виде отношений многочленов от  $y_1, \dots, y_n$ . Легко видеть, что они отождествляются с помощью отображений  $\alpha$  и  $\beta$ , определённых в доказательстве 16.  $\square$

Пусть  $f$  — регулярная функция на всём  $\mathbb{P}^n$ . Тогда  $f|_{U_i}$  — регулярная функция на  $U_i$ , а так как  $U_i$  (по утверждению выше) отождествляется с  $\mathbb{A}^n$ ,  $f|_{U_i}$  отождествляется с регулярной функцией на  $\mathbb{A}^n$  (причём, при помощи определённых нами выше отображений). Тем самым,  $f|_{U_i}$  — многочлен от переменных  $\frac{x_j}{x_i}$ ,  $j \neq i$ . Значит, мы можем представить её в виде

$$f = \frac{r_i(x_0, \dots, x_m)}{x_i^m},$$

где  $r_i$  — многочлен.

Посмотрим, что происходит на пересечениях. Например,

$$\text{на } U_0 \cap U_1: \frac{r_0(x_0, \dots, x_n)}{x_0^m} = \frac{r_1(x_0, \dots, x_n)}{x_1^k}$$

Это равенство имеет вид везде, где  $x_0, x_1 \neq 0$ , легко видеть, что это означает равенство элементов  $\mathbb{k}(x_0, \dots, x_n)$ . Используя единственность разложения на множители, получаем, что  $m = k = 0$ , значит, и степень числителя тоже нулевая. Тем самым, функция равна какой-то константе, а на пересечениях константы согласованы. Получаем, что функция  $f$  постоянна. Итак, мы доказали такое утверждение:

**Предложение 18.** *Всякая регулярная функция  $f : \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{k}$  постоянна.*

Можно провести аналогию между этим утверждением и теоремой Лиувилля из комплексного анализа.

**Предложение 19.** *Любое квазиаффинное многообразие изоморфно некоторому квазипроективному.*

*Доказательство.* Как мы видели, у нас есть изоморфизм  $\mathbb{A}^n \xrightarrow{\sim} U_0$ . Причём, при отображении в эту сторону многочлены гомогенизировались:

$$f(y_1, \dots, y_n) \mapsto f^h(x_0, \dots, x_n) = x_0^{\deg f} f\left(\frac{x_0}{x_1}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right).$$

Получаем следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}^n & \xrightarrow{\sim} & U_0 \\ \uparrow & & \uparrow \\ Z(f) & \dashrightarrow & Z(f^h) \end{array}$$

Значит и соответствующие открытые куски будут изоморфны.  $\square$

Это предложение говорит, что все определённые нами многообразия — (квази)аффинные и (квази)проективные — на деле являются квазипроективными, и в дальнейшем мы будем использовать квазипроективные многообразия, как наиболее общий вид алгебраического многообразия.

**Пример 7.** Рассмотрим кривую в  $C \subset \mathbb{P}^2$ ,  $C = Z(y^2 - xz)$ . Рассмотрим отображения

$$\mathbb{P}^1 \rightarrow C, (s : t) \mapsto (s^2 : st : t^2), \quad C \rightarrow \mathbb{P}^1, (x : y : z) \mapsto \begin{cases} (x : y), & x \neq 0 \\ (y : z), & z \neq 0 \end{cases}.$$

Видно, что эти отображения — взаимно обратные морфизмы, то есть задают изоморфизм  $C$  и  $\mathbb{P}^1$ . Однако однородные координатные кольца у этих многообразий — это  $S(\mathbb{P}^1) = \mathbb{k}[x, y]$  и  $S(C) = \mathbb{k}[x, y, z]/(y^2 - xz)$ , а они неизоморфны. Например, можно доказать, что первое факториально, а второе — нет.

Это наводит нас на мысль о том, что для проективных многообразий нам нужен другой структурный инвариант.

В качестве такого инварианта подойдут локальные кольца точек многообразия — их правда будет не по одному на каждое многообразие, а по одному на каждую точку многообразия. Локальные кольца будут обсуждаться чуть позже 3.

## 2.2 Проективное замыкание аффинного многообразия

Пусть  $T \subset \mathbb{A}^n$  — замкнутое подмножество, попробуем найти  $\overline{T} \subset \mathbb{P}^n$ .

Первое, что приходит в голову — это просто взять гомогенизацию многочленов, которыми задаётся  $T$ . Оказывается, это не всегда даст  $\overline{T} \subset \mathbb{P}^n$ , что иллюстрируется следующим примером:

**Пример 8.** Пусть  $T = Z(y - x^2, z - xy) \subset \mathbb{A}^3$ . Гомогенизуя эти многочлены, получаем

$$\mathbb{P}^3 \supset Z(yw - x^2, zw - xy) \supsetneq Z(yw - x^2, zw - xy, y^2 - xz) = \{(st^2 : s^2t : s^3 : t^3) \mid (s : t) \in \mathbb{P}^1\}T.$$

Включение строгое, так как в левой части ещё лежит точка  $(x : y : z : w) = (0 : 1 : 0 : 0)$ , то есть

$$Z(yw - x^2, zw - xy) = \{(st^2 : s^2t : s^3 : t^3) \mid (s : t) \in \mathbb{P}^1\} \cup \{(0 : 1 : 0 : 0)\}.$$

Однако оказывается, что если гомогенизировать не только образующие идеала, а все содержащиеся в нём многочлены, то гомогенизация всё-таки получится.

**Упражнение 3.** Пусть  $T \subset \mathbb{A}^n$ . Тогда  $\overline{T} = Z(\langle f^h \rangle_{f \in I(T)})$ . При этом, если  $T$  неприводимо, то  $\overline{T}$  — (однозначно определённое) замкнутое неприводимое множество  $R \subset \mathbb{P}^n : R \cap \mathbb{A} = T$ .

**Упражнение 4.** Пусть  $X$  — квазипроективное многообразие, а  $Y$  — аффинное. Упражнение состоит в том, чтобы проследить, что доказательство предложения 10 работает и в этом случае, то есть по-прежнему  $\text{Hom}_{\mathbf{qProj}}(X, Y) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathbf{kAlg}}(A(Y), \mathcal{O}_X)$ .

### 2.3 Прямое произведение проективных многообразий

В этом параграфе мы построим произведение квазипроективных многообразий, как квазипроективное подмногообразие в  $\mathbb{P}^N$  для некоторого  $N$ <sup>8</sup>

Рассмотрим сначала  $X = \mathbb{P}^n$ ,  $Y = \mathbb{P}^m$ . Построим вложение

$$\psi: \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \rightarrow \mathbb{P}^{(n+1)(m+1)-1}$$

следующим образом. Пусть  $x = (u_0 : \dots : u_n) \in \mathbb{P}^n$ ,  $y = (v_0 : \dots : v_m)$ , положим

$$\psi(x \times y) = (\dots : w_{ij} : \dots), \text{ где } w_{ij} = u_i v_j.$$

Обозначим  $T = \psi(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m)$ . Во-первых, покажем, что  $T$  — замкнутое множество в  $\mathbb{P}^{(n+1)(m+1)-1}$ , для этого выпишем его уравнения:

$$w_{ij}w_{k\ell} = w_{kj}w_{i\ell}, \quad i, k = 0, \dots, n, \quad j, \ell = 0, \dots, m. \quad (2)$$

Действительно, подставим:

$$(u_i v_j)(u_k v_\ell) = (u_k v_j)(u_i v_\ell),$$

что выполнено. С другой же стороны, если  $w_{ij}$  удовлетворяют уравнениям (2) и, к примеру,  $w_{00} \neq 0$ , то, полагая  $k = \ell = 0$ , мы получаем, что

$$(\dots : w_{ij} : \dots) = \psi(x, y),$$

где  $x = (w_{00}, \dots, w_{n0})$ ,  $y = (w_{00}, \dots, w_{0m})$  (так мы заодно проверили, что отображение биективно). Строгая проверка того, что  $\psi$  — изоморфизм на образ, задаваемый уравнениями (2), остаётся в качестве упражнения. Это вложение называется *вложение Сегре*. Итак,  $T$  — проективное многообразие. Построим теперь проекции:

<sup>8</sup>Тут можно дописать всякой идеологии, я это позже сделаю возможно.

$$\begin{array}{ccc}
 & T & \\
 \text{pr}_1 \swarrow & & \searrow \text{pr}_2 \\
 \mathbb{P}^n & & \mathbb{P}^m
 \end{array}$$

Если  $\exists i: u_{ij} \neq 0$ :

$$\text{pr}_1(\dots : w_{ij} : \dots) = (w_{0j} : w_{1j} : \dots : w_{nj}) = (u_0 v_j : u_1 v_j : \dots : u_n v_j) = (u_0 : \dots : u_n).$$

И, если  $\exists j: u_{ij} \neq 0$ :

$$\text{pr}_2(\dots : w_{ij} : \dots) = (w_{i0} : w_{i1} : \dots : w_{im}) = (u_i v_0 : u_i v_1 : \dots : u_i v_m) = (v_0 : \dots : v_m).$$

Независимость определения этих отображений от выбора индекса ненулевого элемента обеспечивается уравнениями (2).

*Замечание 15.* Отметим, что  $\text{pr}_1, \text{pr}_2$  — морфизмы проективных многообразий.

Итак, у нас есть композиция

$$\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n \xrightarrow{\psi} T \xrightarrow{\text{pr}_1 \times \text{pr}_2} \mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n.$$

Посмотрим, что произойдёт, если мы рассмотрим  $T \xrightarrow{\text{pr}_1 \times \text{pr}_2} \mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n \xrightarrow{\psi} \mathbb{P}^{(n+1)(m+1)-1}$ :

$$(\dots : w_{ij} : \dots) \mapsto (w_{0j} : w_{1j} : \dots : w_{nj} : w_{i0} : w_{i1} : \dots : w_{im}) \mapsto (w_{j0} w_{i0} : w_{0j} w_{i1} : \dots : w_{0j} w_{im} : w_{1j} w_{i0} : \dots),$$

И, нетрудно показать, что полученный объект снова удовлетворяет уравнениям для  $T$ .

**Определение 22.** Пусть  $X \subset \mathbb{P}^n, Y \subset \mathbb{P}^m$  — квазипроективные многообразия, а  $\psi: \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \rightarrow \mathbb{P}^{(n+1)(m+1)-1}$  — вложение Серге.

Определим *прямое произведение*  $X$  и  $Y$  следующим образом:

$$X \times Y \stackrel{\text{def}}{=} \psi(X \times Y),$$

где в правой части равенства подразумевается теоретико-множественное декартово произведение.

**Предложение 20.** *Определение выше корректно, то есть  $X \times Y$  является квазипроективным подмногообразием в  $\mathbb{P}^{(n+1)(m+1)-1}$ .*

**Доказательство. I.** Пусть сначала  $X \subset \mathbb{P}^m$  и  $Y \subset \mathbb{P}^n$  — проективные. Пусть  $X$  задаётся семейством уравнений  $\{F_i(x_0 : \dots : x_m)\}_i$ , а  $Y$  — семейством уравнений  $\{G_j(y_0 : \dots : y_n)\}_j$ . Пусть  $x_0^{k_0} \dots x_m^{k_m}$  — какой-то моном из  $F_i$ ,  $k_0 + \dots + k_m = N$ , тогда

$$x_0^{k_0} \dots x_m^{k_m} \cdot y_0^N = (x_0 y_0)^{k_0} \dots (x_m y_0)^{k_m} = w_{00}^{k_0} \dots w_{m0}^{k_m}.$$

Аналогично мы можем сделать с любым мономом. Значит,  $F_i \cdot y_0^N$  — однородный многочлен от  $w_{ij}$ . Также мы можем рассмотреть и  $G_j x_i^N$ . Так мы получаем систему из уравнений

$$\begin{cases}
 F_i(x_0 : \dots : x_m) y_k^N = 0 \\
 \vdots \\
 G_j(y_0 : \dots : y_n) x_r^N = 0
 \end{cases}, \quad 0 \leq k \leq n, \quad 0 \leq r \leq m.$$

При желании,  $N$  тут можно полагать одним и тем же, выбирая максимальное.

Далее проверка, что эта система задаёт  $\psi(X \times Y)$ , как проективное подмногообразие в  $\mathbb{P}^{(n+1)(m+1)-1}$ .

**II.** Теперь пусть  $X, Y$  — квазипроективные. Пусть  $Y \subset Y'$ ,  $X \subset X'$ , где  $X', Y'$  — проективные. По определению  $X = X' \cap U$ ,  $Y = Y' \cap V$ , где  $U \subset \mathbb{P}^m$ ,  $V \subset \mathbb{P}^n$  — открытые подмножества. Так как  $\psi$  инъективно (это мы видели в начала параграфа), то

$$\psi(X \times Y) = \psi(X' \times Y') \setminus (\psi(X' \times (Y' \setminus V)) \cup \psi((X' \setminus U) \times Y')).$$

Заметим, что каждое из множеств в правой части замкнуто, откуда видно, что  $\psi(X \times Y)$  — открытое подмножество  $\psi(X' \times Y')$ , то есть квазипроективное подмногообразие в  $\mathbb{P}^{(n+1)(m+1)-1}$ .  $\square$

**Предложение 21.** *Построенное нами выше произведение является произведением в категориальном смысле.*

*Доказательство.* Мы хотим построить стрелку  $\gamma: Z \rightarrow T$ , замыкающую диаграмму и показать её единственность:

$$\begin{array}{ccc} & Z & \\ & \downarrow \gamma & \\ T & & \\ \alpha \swarrow & & \searrow \beta \\ X & & Y \\ \downarrow \text{pr}_1 & & \downarrow \text{pr}_2 \\ & & \end{array}$$

Единственность очевидна сразу, так как  $T$  также будет произведением в категории **Set** (откуда ясно, что на уровне множеств таких стрелок не более одной). Так вот, в качестве стрелки  $\gamma$  возьмём стрелку, замыкающую диаграмму в категории **Set** и покажем, что она годится. Проверять, что это морфизм квазипроективных многообразий, мы будем локально.

Рассмотрим  $z \in Z$ , не умаляя общности  $\alpha(z)$  и  $\beta(z)$  лежат в таких аффинных картах, что первая координата у них ненулевая. В окрестности  $U \ni z$ :

$$\begin{aligned} \alpha(z') &= (1 : f_1(z') : \dots : f_m(z')), \text{ где } f_i \text{ регулярны в } U; \\ \beta(z') &= (1 : g_1(z') : \dots : g_n(z')), \text{ где } g_j \text{ регулярны в } U. \end{aligned}$$

Получается,

$$\gamma(z') = (1 : g_1(z') : \dots : g_n(z') : f_1(z') : f_1(z') \cdot g_1(z') : \dots : f_i(z')g_j(z') : \dots)$$

будем морфизмом (так как произведение регулярных функций регулярно);.  $\square$

*Замечание 16.* В дальнейшем, мы будем писать  $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$  вместо  $\psi(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m)$ , и вообще  $X \times Y$  вместо  $\psi(X \times Y)$ .

Изучим теперь, как устроены подмногообразия  $X \subset \mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n$ .

Пусть  $X$  задаётся уравнениями  $F_i(w_{00} : \dots : w_{nm}) = 0$ , где  $F_i$  — однородные многочлены. После подстановки  $w_{ij} = u_i \cdot v_j$  мы получим систему

$$G_i(u_0 : \dots : u_n; v_0 : \dots : v_m) = 0,$$

где  $G_i$  однородны как по  $u_i$ , так и по  $v_j$ , причём степени однородности обеих систем переменных совпадают. В то же время ясно, что многочлен с таким свойством однородности всегда может быть представлен, как многочлен от произведений  $u_i v_j$ . Однако, если уравнения однородны как по  $u_i$ , так и по  $v_j$ , то они всегда определяют в  $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$  алгебраическое подмногообразие, даже если степени однородности были разными. Действительно, если  $G(u_0 : \dots : u_n; v_0 : \dots : v_m)$  имеет степень однородности  $r$  по  $u_i$  и  $s$  по  $v_j$  (и, например,  $r > s$ ), то

$$G = 0 \longleftrightarrow \begin{cases} v_0^{r-s} G = 0 \\ \vdots \\ v_m^{r-s} G = 0 \end{cases}.$$

Давайте также разберёмся с этим вопросом для  $\mathbb{P}^n \times \mathbb{A}^m$ . Пусть  $\mathbb{A}^m \hookrightarrow U_0 \subset \mathbb{P}^m$ , тут оно задаётся  $v_0 \neq 0$ . Уравнения замкнутого подмножества в  $\mathbb{P}^n \times \mathbb{A}^m$  имеют вид

$$G_i(u_0 : \dots : u_n; v_0 : \dots : v_m) = 0.$$

Пусть степень однородности  $G_i$  по  $v_0, \dots, v_m$  равна  $r_i$ . Поделив уравнение на  $v_0^{r_i}$  и положив  $y_i = v_i/v_0$  мы получим набор уравнений

$$g_i(u_0 : \dots : u_n; y_1 : \dots : y_m) = 0,$$

где  $g_i$  однородны по  $u_0, \dots, u_n$  и, вообще говоря, неоднородны по  $y_1, \dots, y_m$ . Таким образом, мы доказали такую теорему:

**Теорема 9.** *Подмножество  $X \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$  тогда и только тогда замкнуто, когда оно задаётся системой уравнений*

$$G_i(u_0 : \dots : u_n; v_0 : \dots : v_m) = 0$$

*однородных по каждой системе переменных  $u_i$  и  $v_j$  в отдельности.*

*Каждое замкнутое подмножество в  $\mathbb{P}^n \times \mathbb{A}^m$  задаётся системой уравнений*

$$g_i(u_0 : \dots : u_n; y_1 : \dots : y_m) = 0,$$

*однородных по переменным  $u_0, \dots, u_n$ .*

Аналогично дело обстоит с  $\mathbb{P}^{n_1} \times \dots \times \mathbb{P}^{n_k}$ .

## 2.4 Замкнутость образа проективного многообразия

В этом параграфе мы докажем следующее замечательное утверждение:

**Теорема 10.** *Пусть  $X \in \text{Proj}$ ,  $Y \in \text{qProj}$ , а  $f: X \rightarrow Y$  — регулярное отображение. Тогда  $f(X)$  замкнуто в  $Y$ .*

Прежде чем приступать к доказательству, убедимся в необычайной полезности этого утверждения. Например, из него мы сразу получаем вот такое следствие:

**Следствие 7.** *Пусть  $X$  — неприводимое проективное многообразие. Тогда  $\mathcal{O}(X) \cong \mathbb{k}$ .*

*Доказательство.* Пусть  $f: X \rightarrow \mathbb{A}^1$  — регулярная функция. Так как  $f(X)$  замкнут (по теореме 10) и неприводим, либо  $f(X) = \mathbb{A}^1$ , либо  $f(X) = \text{pt}$  (в этом случае мы всё доказали). Предположим, что  $f(X) = \mathbb{A}^1$ . Рассмотрим сквозное отображение

$$X \xrightarrow{f} \mathbb{A}^1 \hookrightarrow \mathbb{P}^1$$

и назовём его  $g$ . Получается, что если  $f(X) = \mathbb{A}^1$ , то  $g(X) = \mathbb{P}^1 \setminus \text{pt}$ , но оно не замкнуто в  $\mathbb{P}^1$  (что приводит нас к противоречию с теоремой 10).  $\square$

*Замечание 17.* Можно думать, что эта теорема является алгебраизацией утверждения о том, что голоморфная на всей римановой поверхности функция без полюсов постоянна.

*Замечание 18.* Так же видно, что в 7 можно требовать от  $X$  только связности (разбив на неприводимые компоненты).

*Доказательство теоремы 10.* Отображение  $f$  мы можем разложить в композицию двух:

$$X \xrightarrow{\Gamma_f} X \times Y \xrightarrow{\text{pr}_2} Y, \quad x \mapsto (x, f(x)) \mapsto f(x).$$

Достаточно доказать, что

1.  $\Gamma_f(X)$  замкнут в  $X \times Y$ ,
2.  $\text{pr}_2$  переводит замкнутые множества в замкнутые.

Докажем сначала **первое**. Выделим это в отдельную лемму:

**Лемма 4** (О замкнутом графике). Для всякого морфизма  $f: X \rightarrow Y$  его график  $\Gamma_f(X)$  замкнут в  $X \times Y$ .

*Доказательство леммы.* Рассмотрим диагональный морфизм  $\Delta: Y \rightarrow Y \times Y$ . Достаточно проверить, что  $\Delta(Y)$  замкнут в  $Y \times Y$ , так как если мы это докажем, то можно рассмотреть

$$X \times Y \xrightarrow{(f, \text{id})} Y \times Y$$

и так как  $\Gamma_f(X) = (f, \text{id})^{-1}(\Delta(Y))$ , то из замкнутости  $\Delta(Y)$  будет следовать замкнутость графика (просто по непрерывности).

Предположим сначала, что  $Y$  аффинное. В этом случае всё просто:  $\Delta(Y) = \Delta(\mathbb{A}^n) \cap (Y \times Y)$  и оба пересекаемых множества очевидно замкнуты.

Если же  $Y$  произвольное, покроем его аффинными:  $Y \subset \bigcup U_i$ , тогда  $\Delta(Y \times Y) \subset \bigcup U_i \times U_i$  и чтобы показать, что  $\Delta(Y)$  замкнуто, нам достаточно убедиться, что  $\Delta(Y) \cap (U_i \times U_i)$  замкнуто для всех  $i$ . Но это очевидно, так как

$$\Delta(Y) \cap (U_i \times U_i) = \Delta(U_i),$$

а  $\Delta(U_i)$  замкнуто по первому шагу доказательства.  $\square$

Теперь покажем **второе**.

Прежде всего, можно считать, что  $X = \mathbb{P}^n$ , так как для произвольного  $X$  можно рассматривать композицию

$$X \times Y \hookrightarrow \mathbb{P}^n \times Y \rightarrow Y,$$

применить теорему для неё и из этого всё будет следовать.

Покрывая  $Y$  аффинными, мы понимаем, что достаточно доказать теорему для случая

$$\mathbb{P}^n \times \mathbb{A}^m \rightarrow \mathbb{A}^m.$$

А в этом случае работать существенно проще, так как (из теоремы 9) мы знаем полное описание замкнутых множеств. Все они имеют вид

$$T = \{(u, y) \mid g_i(u, y) = 0, 1 \leq i \leq t\} \rightsquigarrow \text{pr}(T) = \{y \in \mathbb{A}^m \mid \exists u \in \mathbb{P}^n \ g_i(u, y) = 0, 1 \leq i \leq t\},$$

где  $g_i$  — однородный многочлен по  $u$ .

Пусть  $y \in \mathbb{A}^m$ . Равенство  $g_i(u, y) = 0$  для всех  $1 \leq i \leq t$  выполнено на некотором замкнутом множестве в  $\mathbb{P}^n$ , и  $y \in \text{pr}_2(T)$  если и только если оно непусто. Согласно однородной теореме Гильберта о нулях (пусть  $I^s = (u_0, \dots, u_n)^s \trianglelefteq \mathbb{k}[u_0, \dots, u_n]$ ),

$$y \in \text{pr}_2(T) \iff \forall s : (g_1(u, y), \dots, g_t(u, y)) \not\supseteq I^s,$$

Тем самым, проекцию можно задать в виде

$$\text{pr}(T) = \bigcap_s \{y \in \mathbb{A}^m \mid I^s \not\subset (g_1(u, y), \dots, g_t(u, y))\}. \quad (3)$$

Получается, достаточно доказать, что каждое пересекаемое множество замкнуто. По этому поводу зафиксируем  $s$ . Пусть  $k_i = \deg_u(g_i)$ ,  $\{M^{(\alpha)}\}_{\alpha \in \mathbb{N}^{n+1}, \sum \alpha_j = s}$  — все мономы степени  $s$ <sup>9</sup>. Посмотрим, что означает условие, противоположное к условию (3):

$$I^s \subset (g_1(u, y), \dots, g_t(u, y)) \iff \forall \alpha : M^{(\alpha)} = \sum g_i(u, y) F_{i, \alpha}(u) \quad (*)$$

а  $F_i$  однородные по переменным  $u_i$ . Можно считать, что для всех  $i, \alpha$ :  $\deg F_{i, \alpha} = s - k_i$ , или же  $F_{i, \alpha} = 0$  (в частности, если  $s < k_i$ , то  $F_{i, \alpha} = 0$ )<sup>10</sup>. Теперь рассмотрим  $\{N_i^{(\beta)}\}_{\beta}$  — все мономы (от переменных  $u_i$ ) степени  $s - k_i$ . Условие (\*) означает, что все  $M^{(\alpha)}$  — всевозможные линейные комбинации  $g_i(u, y) N_i^{(\beta)}$ . Иными словами (пусть  $S$  — пространство однородных многочленов от  $u$  степени  $s$ ),

$$S = \text{span}\{g_i(u, y) N_i^{(\beta)}\},$$

Теперь ясно, что

$$I^s \not\subset (g_1(u, y), \dots, g_t(u, y)) \iff S \neq \text{span}\{g_i(u, y) N_i^{(\beta)}\} \iff \text{rank } A < \dim_{\mathbb{k}} S,$$

где  $A$  — матрица, состоящая из коэффициентов  $g_i(u, y) N_i^{(\beta)}$ . Ясно, что при фиксированном  $y$  это полиномиальное условие (обнуление всех определителей подматриц размера  $\dim_{\mathbb{k}} S \times \dim_{\mathbb{k}} S$ ), так что мы показали замкнутость.  $\square$

**Следствие 8.** Пусть  $X \in \text{Proj}$ ,  $Y \in \text{qProj}$ , а  $f: X \rightarrow Y$  — морфизм. Пусть  $Z \subset X$  — замкнутое подмножество. Тогда  $f(Z)$  замкнуто в  $Y$ .

<sup>9</sup>Например, при  $n = 2$  есть такой моном:  $M^{(2,3,1)} = u_0^2 u_1^3 u_2$

<sup>10</sup>Если равенство имеет место, и от всех  $F_{i, \alpha}$  оставить только однородные компоненты данной степени, то равенство сохранится.

## 2.5 Рациональные отображения многообразий

**Лемма 5.** Пусть  $X, Y$  — многообразия, причём  $X$  неприводимо, а  $\varphi, \psi$  — морфизмы из  $X$  в  $Y$ . Предположим, что существует такое непустое открытое множество  $U \subset X$ , что  $\varphi|_U = \psi|_U$ . Тогда  $\varphi = \psi$ .

*Доказательство.* Пусть  $Y \subset \mathbb{P}^n$  для некоторого  $n$ . Беря композиции морфизмов  $\varphi$  и  $\psi$  с вложением  $Y \rightarrow \mathbb{P}^n$ , мы сводим всё к случаю  $Y = \mathbb{P}^n$ . Рассмотрим  $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$  со структурой проективного многообразия, определяемой вложением Сегре (см. 2.3). Морфизмы  $\varphi$  и  $\psi$  определяют морфизм

$$X \xrightarrow{\varphi \times \psi} \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n.$$

Рассмотрим диагональ  $\Delta \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ . Она (как и в аффинном случае) замкнуто, так как представляется уравнениями

$$x_i y_j = x_j y_i, \quad i, j = 0, \dots, n.$$

По предположению  $(\varphi \times \psi)(U) \subset \Delta$ , но  $U$  плотно в  $X$  (так как  $X$  неприводимо), а  $\Delta$  замкнуто, откуда мы имеем  $(\varphi \times \psi)(X) \subset \Delta$ , то есть  $\varphi = \psi$ .  $\square$

**Определение 23.** Пусть  $X, Y$  — многообразия,  $X$  неприводимо. Рассмотрим множество пар  $(U, f)$ , где  $U \subset X$  — открытое, а  $f: U \rightarrow Y$  — морфизм. На этом множестве мы можем ввести такое отношение эквивалентности:

$$(U_1, f_1) \sim (U_2, f_2) \Leftrightarrow f_1|_{U_1 \cap U_2} = f_2|_{U_1 \cap U_2}.$$

Класс эквивалентности по этому отношению называется *рациональным* отображением и обозначается  $f: X \dashrightarrow Y$ .

Из всех пар  $(U, f)$  мы можем выбрать такую, для которой открытое множество  $U$  максимально. Это множество  $U$  мы будем называть *областью регулярности* рационального отображения.

*Замечание 19.* То, что описанное выше отношение — отношение эквивалентности, следует из леммы 5. В частности, любые два  $U_1, U_2 \subset X$  имеют непустое пересечение, так как  $X$  неприводимо.

*Замечание 20.* Область регулярности определена корректно: пара  $(U, f)$  с максимальным  $U$  единственна (она же будет парой с наибольшей  $U$ ). Это верно, так как два эквивалентных рациональных отображения  $(U_1, f_1)$  и  $(U_2, f_2)$  можно «объединить» — они же совпадают на пересечении. Строгая проверка остаётся в качестве упражнения.

**Определение 24.** Рациональное отображение  $f: X \dashrightarrow Y$  называется *доминантным*, если для некоторой пары  $(U, f)$ :  $f(U)$  плотно в  $Y$ .

*Замечание 21.* Если образ плотен для какой-то пары, то это так и для всех (тоже по лемме 5).

Композицию рациональных отображений определить не всегда возможно (по понятным причинам), а вот с доминантными рациональными отображениями дело обстоит лучше.

Пусть у нас есть доминантные рациональные отображения  $X \dashrightarrow Y \dashrightarrow Z$  и они представляются морфизмами  $f: U \rightarrow Y$  и  $g: V \rightarrow Z$ . Так как  $f$  доминантно,  $f(U) \cap V \neq \emptyset$ , откуда  $W = f^{-1}(V) \cap U \neq \emptyset$ . Определим  $g \circ f: X \dashrightarrow Z$  как класс эквивалентности пары  $(W, g \circ f|_W)$ .

Отметим также, что композиция доминантных отображений является доминантной. Действительно, предположим противное, а именно, что образ  $W$  под действием композиции попадает в некоторое замкнутое  $T \subsetneq Z$ . Но  $f(W) \subsetneq g^{-1}(T) \subsetneq Y$ , а это противоречит доминантности.

Значит, квазипроективные многообразия с доминантными рациональными морфизмами образуют категорию.

Кроме того, доминантное рациональное отображение  $\varphi: X \dashrightarrow Y$  индуцирует гомоморфизм полей рациональных функций

$$\varphi^*: \mathbb{k}(Y) \rightarrow \mathbb{k}(X)$$

Действительно, пусть  $\varphi$  представлено парой  $(U, \varphi_U)$  и пусть  $f \in \mathbb{k}(Y)$  — рациональная функция, представленная парой  $(V, f)$ , где  $f$  регулярна на  $V$ . Поскольку  $\varphi_U(U)$  плотно в  $Y$ , оно пересекается с  $V$  и  $\varphi_U^{-1}(V)$  — непустое открытое подмножество  $X$ , так что  $f \circ \varphi_U$  — регулярная функция на  $\varphi_U^{-1}(V)$  (а регулярна она, так как  $\varphi_U$  — морфизм). Она представляет некоторую рациональную функцию на  $X$ .

$$\varphi_U^{-1}(V) \xrightarrow{\varphi_U} V \xrightarrow{f} \mathbb{k}.$$

Таким образом, мы построили отображение

$$\mathbb{k}(Y) \rightarrow \mathbb{k}(X), \quad f \mapsto \varphi^*(f).$$

Пусть  $\mathbf{C}$  — категория неприводимых многообразий с доминантными рациональными отображениями, а  $\mathbf{D}$  — категория конечно порождённых расширений поля  $\mathbb{k}$ .

**Теорема 11.** Для любых неприводимых многообразий  $X, Y$  приведённая выше конструкция осуществляет биективное соответствие между

- множеством доминантных рациональных отображений  $X \rightarrow Y$
- множеством гомоморфизмов  $\mathbb{k}$ -алгебр  $\mathbb{k}(Y) \rightarrow \mathbb{k}(X)$ .

Более этого, это соответствие осуществляет антиэквивалентность категорий  $\mathbf{C}$  и  $\mathbf{D}$ :

$$\mathcal{F}: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}, \quad X \mapsto \mathbb{k}(X).$$

*Доказательство.* Построим отображение обратное тому, что было приведено ранее.

Пусть  $\theta: \mathbb{k}(Y) \rightarrow \mathbb{k}(X)$  — гомоморфизм  $\mathbb{k}$ -алгебр. Надо построить соответствующее ему доминантное рациональное отображение  $X \dashrightarrow Y$ .

Выберем внутри  $Y$  аффинное открытое подмножество, без потери общности  $Y$  можно заменить на него (не поменяются ни поле функций на  $Y$ , ни множество доминантных рациональных отображений  $X \dashrightarrow Y$ ). Итак,  $Y$  — аффинное, пусть  $A(Y)$  — его аффинное координатное кольцо, а  $y_1, \dots, y_n$  — его образующие, как  $\mathbb{k}$ -алгебры. Тогда  $\theta(y_1), \dots, \theta(y_n)$  являются рациональными функциями на  $X$ . Выберем открытое множество  $U \subset X$  так, чтобы все функции  $\theta(y_i)$  были регулярными на  $U$ . В таком случае  $\theta$  определяет инъективный гомоморфизм  $\mathbb{k}$ -алгебр

$$A(Y) \rightarrow \mathcal{O}(U).$$

По теореме 10 ему соответствует морфизм  $\varphi: U \rightarrow Y$ , который определяет доминантное<sup>11</sup> рациональное отображение  $X \rightarrow Y$ .

<sup>11</sup>Оно будет доминантным, так как иначе отображение  $A(Y) \rightarrow \mathcal{O}(U)$  не инъективно.

Теперь убедимся, что мы действительно построили антиэквивалентность категорий. Надо проверить, что для любого неприводимого многообразия  $Y$  поле рациональных функций  $\mathbb{k}(Y)$  конечно порождено над  $\mathbb{k}$  и обратно, что всякое конечно порождённое расширение  $K/\mathbb{k}$  является полем рациональных функций  $K = \mathbb{k}(Y)$  некоторого неприводимого многообразия  $Y$ .

Пусть  $Y$  — неприводимое многообразие, тогда  $\mathbb{k}(Y) = \mathbb{k}(U)$  для любого открытого подмножества  $U \subset Y$ , так что опять же можно полагать  $Y$  аффинным. В этом случае  $\mathbb{k}(Y) \cong \text{Frac } A(Y)$  и, как следствие, оно является конечно порождённым расширением поля  $\mathbb{k}$  степени трансцендентности  $\dim Y$ .

С другой стороны, пусть  $K$  — конечно порождённое расширение поля  $\mathbb{k}$ , а  $y_1, \dots, y_n \in K$  — система образующих. Пусть  $B$  — подалгебра в  $K$ , порождённая  $y_1, \dots, y_n$  над  $\mathbb{k}$ .  $B$  является фактором кольца многочленов  $\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$  по некоторому идеалу  $I$ , так что  $B \cong A(Y)$  для  $Y = Z(I) \subset \mathbb{A}^n$ .  $Y$  будет неприводимым, так как  $A(Y)$  целостное. Значит,  $K \cong \mathbb{k}(Y)$  и теорема доказана.  $\square$

Переводя это на существенно менее изысканный язык, мы получаем такое следствие:

**Следствие 9.** *Неприводимые многообразия  $X$  и  $Y$  бирационально эквивалентны тогда и только тогда, когда их поля рациональных функций  $\mathbb{k}(X)$  и  $\mathbb{k}(Y)$  изоморфны как  $\mathbb{k}$ -алгебры.*

## 2.6 Бирациональная эквивалентность

**Определение 25.** *Бирациональным отображением  $\varphi: X \rightarrow Y$  называется (доминантное) рациональное отображение, которое обладает обратным, т.е. таким (доминантным) рациональным отображением  $\psi: Y \rightarrow X$ , что  $\psi \circ \varphi = \text{id}_X$ ,  $\varphi \circ \psi = \text{id}_Y$ . Многообразия  $X$  и  $Y$  называются бирационально эквивалентными, если существует хотя бы одно бирациональное отображение  $X \rightarrow Y$ .*

**Следствие 10.** *Для любых двух неприводимых многообразий  $X$  и  $Y$  следующие условия эквивалентны:*

1.  $X$  и  $Y$  бирационально эквивалентны,
2. существуют открытые подмножества  $U \subset X$  и  $V \subset Y$  такие, что  $U$  изоморфно  $V$ ,
3.  $\mathbb{k}(X) \cong \mathbb{k}(Y)$  в категории  $\mathbb{k}$ -алгебр.

**Доказательство.** Сначала докажем (1)  $\implies$  (2). Пусть  $\varphi: X \rightarrow Y$  и  $\psi: Y \rightarrow X$  — бирациональные отображения. Пусть  $\varphi$  представлено парой  $(U, \varphi)$ , а  $\psi$  — парой  $(V, \psi)$ . Тогда отображение  $\psi \circ \varphi$  представляется парой  $(\varphi^{-1}(V), \psi \circ \varphi)$ , а так как  $\psi \circ \varphi = \text{id}_X$  как рациональное отображение,  $\psi \circ \varphi$  тождественно на  $\varphi^{-1}(V)$ . Аналогично,  $\varphi \circ \psi$  тождественно на  $\psi^{-1}(U)$ . Получается,  $\varphi^{-1}(\psi^{-1}(U)) \subset X$  и  $\psi^{-1}(\varphi^{-1}(U)) \subset Y$  — изоморфные открытые подмножества (изоморфизм осуществляется посредством отображений  $\varphi$  и  $\psi$ ).

Утверждение (2)  $\implies$  (3) следует из определения полей функций:

$$\mathbb{k}(U) \cong \mathbb{k}(X), \quad \mathbb{k}(V) \cong \mathbb{k}(Y), \quad \mathbb{k}(U) \cong \mathbb{k}(V) \implies \mathbb{k}(X) \cong \mathbb{k}(Y).$$

Утверждение (3)  $\implies$  (1) напрямую следует из теоремы 11.  $\square$

Теперь докажем какой-нибудь результат про бирациональную эквивалентность. Напомним несколько фактов из алгебры:

**Теорема 12** (О примитивном элементе). *Пусть  $L$  — конечное сепарабельное расширение поля  $K$ . Тогда существует элемент  $\alpha \in L$ , порождающий поле  $L$ , как расширение над  $K$ . Более того, если  $\beta_1, \dots, \beta_n$  — произвольная система образующих  $L/K$  и поле  $K$  бесконечно, то  $\alpha$  можно выбрать  $\alpha$  в виде линейной комбинации  $\alpha = c_1\beta_1 + \dots + c_n\beta_n$  элементов  $\beta_i$  с коэффициентами  $c_i \in K$ .*

**Определение 26.** Расширение  $K/\mathbb{k}$  называется *сепарабельно порождённым*, если существует такой базис трансцендентности  $\{x_i\}$  в  $K/\mathbb{k}$ , что поле  $K$  является сепарабельным алгебраическим расширением поля  $\mathbb{k}(\{x_i\})$ . В таком случае  $\{x_i\}$  называется *сепарабельным базисом трансцендентности*.

**Теорема 13.** *Пусть  $K/\mathbb{k}$  — конечно порождённое и сепарабельно порождённое расширение поля  $\mathbb{k}$ . Тогда всякое множество образующих расширения  $K/\mathbb{k}$  содержит подмножество, являющееся сепарабельным базисом трансцендентности.*

**Теорема 14.** *Пусть  $\mathbb{k}$  — алгебраически замкнутое поле. Тогда любое конечно порождённое расширение  $K/\mathbb{k}$  является сепарабельно порождённым.*

**Предложение 22.** *Всякое неприводимое многообразие  $X$  размерности  $r$  бирационально эквивалентно гиперповерхности  $Y \subset \mathbb{P}^{r+1}$ .*

*Доказательство.* Начнём с того, что поле функций  $\mathbb{k}(X)$  является конечно порождённым расширением поля  $\mathbb{k}$ . По теореме 14 оно сепарабельно порождено над  $\mathbb{k}$ . Значит, существует базис трансцендентности  $x_1, \dots, x_r \in \mathbb{k}(X)$  такой, что  $\mathbb{k}(X)$  — конечное сепарабельное расширение  $\mathbb{k}(x_1, \dots, x_r)$ . Теперь по теореме о примитивном элементе 12 существует  $y \in \mathbb{k}(X)$  такой, что  $K = \mathbb{k}(y, x_1, \dots, x_r)$ . Элемент  $y$  алгебраичен над  $\mathbb{k}$ , то есть удовлетворяет некоторому полиномиальному уравнению с коэффициентами из поля рациональных функций от переменных  $\mathbb{k}(x_1, \dots, x_r)$ . Домножая на знаменатели, мы получим

$$f(y, x_1, \dots, x_r) = 0,$$

где  $f$  — некоторый неприводимый многочлен. Теперь легко видеть, что он определяет гиперповерхность в  $\mathbb{A}^{r+1}$  с полем функций  $\mathbb{k}(X)$ , а отсюда, по теореме 11, она бирационально эквивалентна  $X$ . Проективное замыкание этой гиперповерхности и есть требуемая гиперповерхность  $Y \subset \mathbb{P}^{r+1}$ .  $\square$

## 2.7 Рациональные многообразия

**Определение 27.** *Рациональным многообразием* мы будем называть многообразие, бирационально изоморфное проективному пространству. Эквивалентно (по теореме 11), можно говорить, что это многообразие, поле функций которого изоморфно  $\mathbb{k}(t_1, \dots, t_n)$ .

**Пример 9.** Например, окружность  $x^2 + y^2 = 1$  является рациональным многообразием. Действительно, так как поле алгебраически замкнуто,

$$x^2 + y^2 = (x + iy)(x - iy) = st$$

и окружность задаётся как  $st = 1$ . Её аффинная алгебра — это  $\mathbb{k}[s, t]/(st - 1) = \mathbb{k}(s, s^{-1})$ . Видно, что  $\mathbb{k}(X) \cong \mathbb{k}(t)$ .

А знаем ли мы многообразия, которые не являются рациональными? Рассмотрим *эллиптическую кривую*

$$y^2 = x^3 + ax + b,$$

с условием, что  $x^3 + ax + b$  не имеет кратных корней и  $\text{char } \mathbb{k} \neq 2, 3$ . Условие про кратные корни гарантированно, например, тем, что  $4a^3 + 27b^2 \neq 0$ .

Линейной заменой переменной  $x$ , уравнение сводится к виду

$$y^2 = x(x - 1)(x - \alpha), \quad \alpha \neq 0.$$

Покажем, что эта кривая не является рациональной. Посмотрим на проективное замыкание этой кривой, для этого нужно взять гомогенизацию этого многочлена:

$$y^2 z = x^3 + axz^2 + bz^3.$$

Несложно видеть, что проективное замыкание отличается от самой кривой лишь одной бесконечно удалённой точкой: в карте  $z \neq 0$  лежат все аффинные точки, а  $z = 0$  даёт одну бесконечно удалённую точку  $(0 : 1 : 0)$ .

Так как аффинная кривая содержится в проективной, как открытое подмножество, то поля функций у них совпадают. Отсюда в частности следует, что если мы докажем, что аффинная кривая не рациональна, то мы получим, что её проективизация не изоморфна  $\mathbb{P}^1$ .

То, что аффинная кривая не рациональна, будем доказывать от противного. Предположим, что  $\mathbb{k}(X) \cong \mathbb{k}(t)$ , и

$$y \leftrightarrow \frac{p_1(t)}{p_2(t)}, \quad x \leftrightarrow \frac{q_1(t)}{q_2(t)}.$$

Не умоляя общности,  $(p_1, p_2) = (q_1, q_2) = 1$ . Должно быть выполнено соотношение

$$\frac{p_1^2}{p_2^2} = \frac{q_1}{q_2} \left( \frac{q_1}{q_2} - 1 \right) \left( \frac{q_1}{q_2} - \alpha \right) \rightsquigarrow p_1^2 \cdot q_2^3 = p_2^2 q_1 (q_1 - q_2)(q_1 - \alpha q_2).$$

Отсюда  $p_2^2 : q_2^3$  и  $q_2^3 : p_2^2$ , то есть они пропорциональны, а именно  $q_2^3/p_2^2 = c \in \mathbb{k}$ . Получаем

$$cp_1^2 = q_1(q_1 - q_2)(q_1 - \alpha q_2)$$

и подправляя  $p_1$  и  $p_2$  правильным образом на константный множитель, можно считать  $c = 1$ . В силу взаимной простоты множителей, мы получаем, что  $q_1$ ,  $q_1 - q_2$ ,  $q_1 - \alpha q_2$  — квадраты. При этом  $q_2$  — тоже квадрат, так как  $q_2^3 = p_2^2$ .

Получается, в некотором двумерном  $\mathbb{k}$ -подпространстве  $\mathbb{k}[t]$  нашлось четыре различных (не совпадающих даже с точностью до ассоциированности) квадрата. Несложно придумать три квадрата, лежащих в двумерном пространстве — скажем, подойдут  $(x^2 - y^2)^2$ ,  $(x^2 + y^2)^2$ ,  $x^2 y^2$ , но, предложение ниже говорит, что, оказывается, четырёх таких квадратов найти не получится.

**Предложение 23.** *Пусть  $Q_1, Q_2$  — два взаимно простых многочлена. В пространстве  $\text{span}_{\mathbb{k}}(Q_1, Q_2)$  нет четырёх ненулевых квадратов (разумеется, различных с точностью до ассоциированности).*

*Доказательство.* Пусть  $R_1, R_2 \in \text{span}_{\mathbb{k}}(Q_1, Q_2)$  непропорциональные квадраты. Так как они непропорциональны,  $\text{span}_{\mathbb{k}}(R_1, R_2) = \text{span}_{\mathbb{k}}(Q_1, Q_2)$ . Оставшиеся два квадрата можно записать в виде  $\alpha_1 R_1 - \alpha_2 R_2$  и  $\beta_1 R_1 - \beta_2 R_2$ . Пусть  $R_1 = S_1^2$ ,  $R_2 = S_2^2$  и

$$\begin{aligned}\alpha_1 R_1 - \alpha_2 R_2 &= (\sqrt{\alpha_1} S_1 + \sqrt{\alpha_2} S_2)(\sqrt{\alpha_1} S_1 - \sqrt{\alpha_2} S_2) \\ \beta_1 R_1 - \beta_2 R_2 &= (\sqrt{\beta_1} S_1 + \sqrt{\beta_2} S_2)(\sqrt{\beta_1} S_1 - \sqrt{\beta_2} S_2)\end{aligned}$$

Так как  $(S_1, S_2) = 1$ , значит взаимно просты и правые части равенств, а отсюда  $\sqrt{\alpha_1} S_1 + \sqrt{\alpha_2} S_2, \sqrt{\alpha_1} S_1 - \sqrt{\alpha_2} S_2, \sqrt{\beta_1} S_1 + \sqrt{\beta_2} S_2, \sqrt{\beta_1} S_1 - \sqrt{\beta_2} S_2$  — квадраты.

Выберем изначально  $Q_1, Q_2$  с наименьшим максимумом степеней; выкладка выше показывает возможность бесконечного спуска, то есть противоречие.  $\square$

**Следствие 11.** Эллиптическая кривая (кривая вида  $\{y^2 = x^3 + ax + b\}$  при  $4a^3 + 27b^2 \neq 0$ ,  $\text{char } \mathbb{k} \neq 2, 3$ ) не рациональна.

*Замечание 22.* Альтернативное доказательство этого факта использует то, что бирациональные морфизмы между неособыми проективными кривыми продолжаются до регулярных, а отсутствие изоморфизма на уровне  $\text{Proj}$  доказывать проще. Об этом написано в [3.6](#).

### 3 Локальные кольца

#### 3.1 Локальное кольцо в точке

**Определение 28.** Пусть  $X$  — квазипроективное многообразие,  $P \in X$ , а  $\mathcal{O}(X)$  — его кольцо регулярных функций. Для точки  $P$  определим её *локальное кольцо*  $\mathcal{O}_P$ , как

$$\mathcal{O}_P = \varinjlim_{U \ni P} \mathcal{O}(U).$$

Говоря более изысканно, это кольцо ростков регулярных функций на  $X$  в окрестности  $P$ . Или, иными словами, элемент  $\mathcal{O}_P$  — это пара  $(U, f)$ , где  $U$  — открытая окрестность  $P$  в  $X$ , а  $f$  — регулярная функция на  $U$ , причём пары  $(U, f)$  и  $(V, g)$  отождествляются, если  $f = g$  на  $U \cap V$ .

Отметим, что кольцо  $\mathcal{O}_P$  на самом деле является локальным кольцом: его единственный максимальный идеал  $\mathfrak{m}_P$  состоит из всех ростков регулярных функций, обращающихся в нуль в точке  $P$ . В самом деле, если  $f(P) \neq 0$ , то  $1/f$  регулярна в некоторой окрестности  $P$  и  $f$  обратима в  $\mathcal{O}_P$ . Раз всё вне  $\mathfrak{m}_P$  обратимо, то  $\mathfrak{m}_P$  — единственный максимальный идеал. Также несложно видеть, что поле вычетов  $\mathcal{O}_P/\mathfrak{m}_P \cong \mathbb{k}$ .

Пусть  $A$  — локальное кольцо,  $\mathfrak{m}$  — его максимальный идеал. Тогда  $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$  — векторное пространство над  $A/\mathfrak{m}$ .

Доказательство следующей леммы предоставляется читателю как упражнение, она будет использоваться в дальнейшем.

**Лемма 6.** Пусть  $A$  — коммутативное кольцо,  $I_1, \dots, I_n$  — набор идеалов ( $n \geq 2$ ), причем среди них есть не более двух **не** простых. И пусть

$$J \trianglelefteq A, \quad J \subset I_1 \cup \dots \cup I_n.$$

Тогда  $J \subset I_k$  для некоторого  $k$ .

**Упражнение 5.** Локальное кольцо точки  $P = (0, 0)$  для кривой  $X = Z(y^2 - x^3)$  не является дискретно нормированным.

**Пример 10.** Нетрудно заметить, что в случае упражнения выше у нас всё устроено так:

$$\dim X = 1, \quad \mathfrak{m} = (x, y), \quad \dim_{\mathbb{k}} \mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2 = 2.$$

Возводя в степень максимальный идеал этого кольца можно заметить интересную вещь:

$$\mathfrak{m}^3 = (x^3, x^2y, xy^2, y^3) = (y^2, x^2y) \subset (y) \implies \mathfrak{m}^3 \subset (y) \subset \mathfrak{m}$$

Это явление имеет такое коммутативно алгебраическое происхождение:

**Теорема 15.** Пусть  $A$  — нётерово локальное кольцо. Тогда  $\dim A < \infty$  и она равна такому минимальному  $d$ , для которого  $\exists k \in \mathbb{N}$ ,  $x_1, x_2, \dots, x_d \in \mathfrak{m}$  такие, что

$$\mathfrak{m}^k \subset (x_1, \dots, x_d) \subset \mathfrak{m}.$$

*Доказательство.* Мы будем доказывать эту теорему для колец геометрического происхождения, то есть колец вида  $\mathcal{O}_P$ . Зафиксируем  $d$  и предположим, что для некоторого  $k \in \mathbb{N}$  мы имеем

$$\mathfrak{m}_P^k \subset (x_1, \dots, x_d) \subset \mathfrak{m}.$$

**Шаг 1.** Покажем сначала, что в таком случае  $\dim \mathcal{O}_P \leq d$ .

Для начала обоснуем, почему можно считать, что  $X$  неприводимо, и, следовательно,  $\mathcal{O}_P$  целостно. Как копредел, локальное кольцо зависит только от окрестности точки  $P$ , так что без потери общности можно считать, что  $X$  аффинно. В аффинном случае  $\mathcal{O}_P$  — локализация  $A(X)$  в максимальном идеале  $\mathfrak{m}_P$ . Любая максимальная цепочка идеалов в  $\mathcal{O}_P$  длины  $\dim \mathcal{O}_P$  начинается в каком-то минимальном простом идеале  $\mathcal{O}_P$ , он же — минимальный простой идеал  $A(X)$ , содержащийся в  $\mathfrak{m}_P$ . Такие идеалы отвечают неприводимым компонентам  $X$ , содержащим точку  $P$ , откуда видно, что при замене  $X$  на ту неприводимую компоненту, содержащую точку  $P$ , которая имеет максимальную размерность,  $\dim \mathcal{O}_P$  не поменяется.

Итак, можно считать, что  $X = \text{Spec } A$  аффинно и неприводимо, следовательно, локальное кольцо  $\mathcal{O}_P = A_{\mathfrak{m}_P}$  целостно.

Далее представим максимальную локализацию, как копредел главных:  $\mathcal{O}_P = \varinjlim_{a(P) \neq 0} A_a$ , и в соответствии с этим докажем вот такую лемму:

**Лемма 7.** Пусть  $I, J$  — идеалы в целостном нётеровом кольце  $A$ ,  $\mathfrak{m} \in \text{Spec } A$  и  $I_{\mathfrak{m}} \subset J_{\mathfrak{m}}$ . Тогда существует  $a \in A \setminus \mathfrak{m}$  такой, что  $I_a \subset J_a$ .

*Доказательство леммы.* Рассмотрим короткую точную последовательность

$$0 \rightarrow J \rightarrow I + J \rightarrow (I + J)/J \rightarrow 0.$$

Так как локализация — это точный функтор, точной будет и последовательность

$$0 \rightarrow J_{\mathfrak{m}} \xrightarrow{\sim} (I + J)_{\mathfrak{m}} \rightarrow ((I + J)/J)_{\mathfrak{m}} \rightarrow 0.$$

Тогда, так как  $I_{\mathfrak{m}} \subset J_{\mathfrak{m}}$ , вторая слева стрелка — изоморфизм, откуда  $((I + J)/J)_{\mathfrak{m}} = 0$ . Рассмотрим конечно порождённый  $A$ -модуль  $M = (I + J)/J$ . Так как  $M_{\mathfrak{m}} = 0$ , существует  $a \in A \setminus \mathfrak{m}$  такой, что  $M_a = 0$ , то есть  $((I + J)/J)_a = 0$ . Но последовательность

$$0 \rightarrow J_a \xrightarrow{\sim} (I + J)_a \rightarrow ((I + J)/J)_a \rightarrow 0 \iff 0 \rightarrow J_a \xrightarrow{\sim} (I + J)_a \rightarrow 0$$

также точна, откуда  $I_a \subset J_a$ . □

Применяя эту лемму к  $\mathcal{O}_P = A_{\mathfrak{m}_P}$  мы получаем, что  $\exists b \in A \setminus \mathfrak{m}_P$ : в кольце  $B = A_b$  имеется включение идеалов

$$\mathfrak{m}_P^k \subset (x_1, \dots, x_d) \subset \mathfrak{m}_P.$$

Беря радикалы, получаем

$$\mathfrak{m}_P \subset \sqrt{(x_1, \dots, x_d)} \subset \mathfrak{m}_P,$$

откуда по теореме Гильберта о нулях  $\{P\} = Z(x_1, \dots, x_d) \cap \text{Specm } B$ . Предполагая  $\dim \mathcal{O}_P > d$ , мы приходим к противоречию, так как  $Z(x_1, \dots, x_d)$  — это пересечение  $d$  гиперповерхностей, а оно либо пустое, либо размерности  $\dim \mathcal{O}_P - d > 0$ .

**Шаг 2.** Покажем, что для  $d = \dim \mathcal{O}_P$  существует натуральное  $k$  такое, что

$$\mathfrak{m}_P^k \subset (x_1, \dots, x_d).$$

Будем доказывать это индукцией по  $d$ .

**База.** Случай  $d = 0$  очевиден, так как кольцо  $\mathcal{O}_P$  локальное, откуда  $\text{Rad}(\mathcal{O}_P) = \mathfrak{m}_P$ , но в артиновом кольце радикал Джекобсона нильпотентен, то есть для некоторого  $b \in N$ :  $\mathfrak{m}_P^N = 0$  и условие будет выполнено.

**Переход.** Рассмотрим элемент  $x_1$ , не лежащий в объединении минимальных простых идеалов. Как мы видели при доказательстве теоремы 7,

$$\dim \mathcal{O}_P/(x_1) \leq \dim \mathcal{O}_P - 1,$$

так как если у нас есть максимальная цепочка вложенных простых  $\bar{\mathfrak{p}}_0 \subset \dots \subset \bar{\mathfrak{p}}_n \trianglelefteq \mathcal{O}_P/(x_1)$ , то цепочка  $\mathfrak{p}_0 \subset \dots \subset \mathfrak{p}_n \trianglelefteq \mathcal{O}_P$  уже не будет максимальной, так как идеал  $\mathfrak{p}_0$  не минимальный. По индукционному предположению существует  $k$  такое, что

$$\mathfrak{m}_P^k/(x_1) \subset (\bar{x}_2, \dots, \bar{x}_d) \subset \mathfrak{m}_P/(x_1) \implies \mathfrak{m}_P^k \subset (x_1, x_2, \dots, x_d) \subset \mathfrak{m}_P.$$

Тот факт, что не лежащий в объединении минимальных простых идеалов  $x$  найдётся, остаётся в качестве упражнения; подсказка — использовать 6. Заметим, что при факторизации по  $(x_1)$  кольцо остаётся максимальной локализацией аффинной  $\mathbb{k}$ -алгебры, то есть кольцом вида  $\mathcal{O}_P$ . □

*Замечание 23.* Комментарий про  $\dim A < \infty$  тут по существу, так как произвольное нётерово кольцо, вообще говоря, не обязано быть конечномерным. Однако в нашем случае кольцо  $\mathcal{O}_P$  сразу очевидно, что  $\dim \mathcal{O}_P < \infty$ , как размерность максимальной неприводимой компоненты, содержащей точку  $P$ .

**Следствие 12** (Из теоремы 15). *Пусть  $A$  — нётерово локальное кольцо с максимальным идеалом  $\mathfrak{m}$ . Тогда*

$$\dim A \leq \dim_{A/\mathfrak{m}} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2.$$

*Доказательство.* Пусть  $\bar{x_1}, \dots, \bar{x_n}$  — базис  $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ . Тогда по предложению 31 мы имеем  $(x_1, \dots, x_n) = \mathfrak{m}$ , а тогда  $\mathfrak{m} \subset (x_1, \dots, x_n) \subset \mathfrak{m}$ . Но тогда по теореме 15 мы имеем  $\dim A \leq n$ .  $\square$

Применяя это к кольцу  $\mathcal{O}_P$ , мы получаем, что

$$\dim \mathcal{O}_P \leq \dim_{\mathbb{k}} \mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2.$$

Это наводит на мысль, что полезно рассматривать следующие объекты:

**Определение 29.** Пусть  $A$  — локальное кольцо с максимальным идеалом  $\mathfrak{m}$ . Оно называется *регулярным*, если  $\dim A = \dim_{\mathbb{k}} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ .

Нам понадобятся следующие факты о регулярных локальных кольцах:

1. Регулярное локальное кольцо целостное — будет доказано здесь 16.
2. Регулярное локальное кольцо факториально — доказано не будет, вариант идеи возможного доказательства приводится после теоремы 18. Там же приведён альтернативный аргумент, о целостности локального кольца.
3. Любая локализация регулярного локального кольца относительно простого идеала — тоже регулярное локальное кольцо ??.

Перед тем, как доказывать эти факты, введём объект, который в принципе мотивирует изучение регулярных колец (то есть поймём, что условие регулярности означает геометрически).

### 3.2 Касательное пространство

**Определение 30.** Пусть  $X \subset \mathbb{A}^n$  — аффинное многообразие,  $I(X) = (f_1, \dots, f_m)$ ,  $P \in X$ . Пространство решений системы линейных уравнений относительно  $(t_1, \dots, t_n)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(P)t_1 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(P)t_n = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(P)t_1 + \dots + \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(P)t_n = 0 \end{array} \right. \quad (4)$$

называется *касательным пространством к многообразию  $X$  в точке  $P$* . Будем его обозначать  $T_P X$ .

Данное определение понятным образом соотносится с определением касательного пространства в анализе. Однако у него есть некоторые недостатки — зависимость определения от выбора образующих идеала и зависимость от выбора объемлющего пространства. Сейчас с этим сейчас поборемся.

*Замечание 24.* Определение корректно, то есть оно не зависит от выбора образующих в идеале  $I(X)$ .

*Доказательство.* Возьмём  $f \in I(X)$  и разложим его по образующим

$$f = f_1 g_1 + \dots + f_m g_m.$$

Теперь продифференцируем:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(P) = \sum_{j=1}^m \left( \frac{\partial f_j}{\partial x_1}(P) \cdot g_j(P) + \underbrace{f_j(P)}_{=0, \text{ т.к. } f_j \in I(X)} \cdot \frac{\partial g_j}{\partial x_1}(P) \right) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f_j}{\partial x_1}(P) \cdot g_j(P).$$

Тогда отсюда мы заключаем, что

$$\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} t_i = \sum_{i,j} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(P) g_j(P) t_i = \sum_j g_j(P) \cdot \left( \sum_i \frac{\partial f_j}{\partial x_1}(P) \cdot t_i \right)$$

Теперь заметим, что если  $(t_1, \dots, t_n)$  удовлетворяют системе 4, то каждое слагаемое будет равно нулю. Значит, можно определять касательное пространство более инвариантно: записать бесконечную систему таких уравнений по всем элементам  $f \in I(X)$ , и результат не поменяется.  $\square$

Проверим независимость определения касательного пространства от объемлющего пространства, дав эквивалентное функториальное определение. Для этого рассмотрим билинейное спаривание

$$\mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2 \times T_P X \rightarrow \mathbb{k}, \quad (\bar{g}, (t_1, \dots, t_n)) \mapsto \sum_i \frac{\partial g}{\partial x_i}(P) t_i \in \mathbb{k}.$$

С производными многочленов выше по тексту проблем не было, а в данном месте придётся пояснить, что означают производные элементов локального кольца.

- Для начала поднимемся в объемлющее пространство — для функции  $\bar{g} \in A(X) = \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]/I(X)$  можно рассмотреть прообраз  $g \in \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ . Заметим, что  $\frac{\partial g}{\partial x_i}(P)$  **зависит** от выбора представителя  $\bar{g}$ , но — удивительное дело — если  $(t_1, \dots, t_n) \in T_P X$ , то сумма  $\sum_i \frac{\partial g}{\partial x_i}(P) t_i$  от выбора представителя  $\bar{g}$  уже не зависит — для всякого  $g \in I(X)$  эта сумма равна нулю по определению касательного пространства.
- Пусть  $g \in \mathcal{O}_P$ , то есть в окрестности точки  $P$  функция  $g$  равна отношению регулярных на  $X$  функций:  $g = r/s$ . Определим  $\frac{\partial g}{\partial x_i}(P) := \frac{\frac{\partial r}{\partial x_i}(P) \cdot s(P) - r(P) \cdot \frac{\partial s}{\partial x_i}(P)}{s(P)^2}$  в соответствии с формулой  $g' = \frac{r's - rs'}{s^2}$ . В анализе данная формула означала предел приращения функции по отношению к приращению аргумента, но тут такие инфинитезимальные разговоры обосновать сложнее, поэтому предлагается поверить (или проверить), что определение корректно (не зависит от выбора представления  $g = r/s$ , и удовлетворяет тем же свойствам, что и удовлетворяла обычная производная — скажем,  $(fg)' = f'g + fg'$ ).
- Наконец, если  $\bar{g}_1 = \bar{g}_2 \in \mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2$ , то  $g_1 - g_2 = h \in \mathfrak{m}_P^2$ . Тогда

$$h = \sum_j \ell_j \ell'_j, \text{ где } \ell_j, \ell'_j \in \mathfrak{m}_P \implies \frac{\partial h}{\partial x_i}(P) = \sum_j \left( \ell_j(P) \frac{\partial \ell'_j}{\partial x_i}(P) + \frac{\partial \ell_j}{\partial x_i}(P) \cdot \ell'_j(P) \right) = 0.$$

Теперь наконец покажем, что оно невырождено.

- Зафиксируем  $(t_1, \dots, t_n) \in T_P X$ . Предположим, что

$$\forall g \in \mathfrak{m}_P : \sum_i \frac{\partial g}{\partial x_i}(P) t_i = 0.$$

Пусть  $P = (p_1, \dots, p_n)$ . Принимая  $g = x_i - p_i \in \mathfrak{m}_P$ , получаем из равенства выше, что  $t_i = 0 \forall i$ .

- Теперь зафиксируем  $g \in \mathfrak{m}_P \subset \mathcal{O}_P \subset \mathbb{k}(x_1, \dots, x_n)$ . Предположим, что

$$\sum_i \frac{\partial g}{\partial x_i}(P) \cdot t_i = 0 \quad \forall (t_1, \dots, t_n) \in T_P X.$$

Это уравнение является следствием уравнений для касательного пространства, откуда

$$\sum_i \frac{\partial g}{\partial x_i}(P) t_i = \alpha_1 \ell_1 + \dots + \alpha_m \ell_m, \text{ где } \ell_j = \sum_i \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(P) t_i.$$

Приравнивая коэффициенты при  $t_i$  слева и справа мы получаем, что

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(P) = \alpha_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(P) + \dots + \alpha_m \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(P) \quad \forall i \implies \frac{\partial(g - \sum \alpha_j f_j)}{\partial x_i}(P) = 0.$$

Положим  $\tilde{g} = g - \sum \alpha_j f_j$  и разложим  $\tilde{g}$  по формуле Тейлора в точке  $P$ :

$$\tilde{g}(x_1, \dots, x_n) = \underbrace{\tilde{g}(p_1, \dots, p_n)}_{=0} + \sum_i \underbrace{\frac{\partial \tilde{g}}{\partial x_i}(P) \cdot (x_i - p_i)}_{=0} + \varepsilon, \quad \varepsilon \in \mathfrak{m}_P^2,$$

(такое разложение очевидно для многочленов, и его можно проверить для рациональных функций), откуда  $\tilde{g} = 0$  в  $\mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2$ . С другой стороны,  $\sum \alpha_j f_j \equiv 0$  на  $X$ , откуда  $g \in \mathfrak{m}_P^2$ , то есть  $\bar{g} = 0$  в  $\mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2$ , что и требовалось доказать.

Значит, мы только что доказали, что имеет место изоморфизм

$$T_P X \cong (\mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2)^*.$$

Это замечательное наблюдение позволяет нам распространить понятие касательного пространства с аффинного многообразия на произвольное квазипроективное:

**Определение 31.** Пусть  $X \in \mathbf{qProj}$  а  $P \in X$ . Касательным пространством к  $X$  в точке  $P$  мы будем называть векторное пространство

$$T_P X \stackrel{\text{def}}{=} (\mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2)^*.$$

*Замечание 25.* Так как идеал  $\mathfrak{m}_P$  конечно порождён, то это пространство всегда конечномерное.

**Теорема 16.** Регулярное локальное кольцо геометрического происхождения является областью целостности.

*Доказательство.* Будем вести индукцию по  $\dim R$ .

**База.** Пусть  $\dim R = 0$ . Тогда, так как  $R$  регулярно,

$$\dim R = \dim_{\mathbb{k}} \mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2 = 0 \iff \mathfrak{m}_P = \mathfrak{m}_P^2.$$

Так как  $R$  — нётерово кольцо размерности 0, оно артиново, а отсюда (и из того факта, что оно локальное)  $\mathfrak{m}_P = \text{Rad}(R) = \text{NRad}(R)$ , откуда существует такое  $n$ , что  $\mathfrak{m}_P^n = 0$ , но тогда  $\mathfrak{m}_P = 0$ , то есть  $R$  — поле.

**Переход.** Пусть  $\dim R \geq 1$ . Рассмотрим элемент  $x \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{m}^2$ , не лежащий в объединении минимальных простых. Такой существует, так как в противном случае

$$\mathfrak{m} = \bigcup_{\mathfrak{p} \text{ — минимальный простой}} \mathfrak{p} \cup \mathfrak{m}^2 \stackrel{6}{\implies} \mathfrak{m} \subset \mathfrak{p} \text{ или } \mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}^2.$$

В первом случае  $\dim R = 0$ . Во втором случае по лемме Накаямы 30:  $\mathfrak{m} = 0$ , откуда  $R$  — поле.

Теперь рассмотрим кольцо  $S = R/(x)$ . Ясно (см. 7), что  $\dim S \leq \dim R - 1$ . Пусть  $\dim S = d$ . Тогда согласно 15:  $\exists x_1, \dots, x_d \in R, k \in \mathbb{N}$ :

$$\overline{\mathfrak{m}^k} \subset (\overline{x_1}, \dots, \overline{x_d}) \subset \overline{\mathfrak{m}} \implies \mathfrak{m}^k \subset (x, x_1, \dots, x_d) \subset \mathfrak{m},$$

откуда опять же по 15,  $\dim R \leq \dim S + 1$ , то есть имеет место равенство  $\dim S = \dim R - 1$ . Теперь убедимся, что  $S$  — регулярное локальное кольцо. Оно локальное с единственным идеалом  $\overline{\mathfrak{m}}$ , откуда

$$\dim S \leq \dim_{\mathbb{k}} \overline{\mathfrak{m}}/\overline{\mathfrak{m}}^2.$$

С другой стороны, мы имеем

$$\dim_{\mathbb{k}} \overline{\mathfrak{m}}/\overline{\mathfrak{m}}^2 \leq \dim_{\mathbb{k}} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 - 1 = \dim R - 1 = \dim S,$$

так как отображение  $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \hookrightarrow \mathfrak{m}/(\mathfrak{m}^2 + (x))$  имеет нетривиальное ядро. Значит, кольцо  $S$  регулярно. По индукционному предположению  $S$  — область целостности, откуда  $(x) \subset R$  — простой идеал. Так как  $x$  не лежит ни в одном минимальном простом идеале, существует  $\mathfrak{p} \in \text{Spec } R$  такой, что  $\mathfrak{p} \subseteq (x)$ . Рассмотрим  $y \in \mathfrak{p}$ , тогда  $y = ax$  для некоторого  $a \in R$ . Но, так как  $x \notin \mathfrak{p}$ , отсюда  $a \in \mathfrak{p}$ . То есть  $\mathfrak{p} = (x)\mathfrak{p}$ , откуда по лемме Накаямы 30:  $\mathfrak{p} = 0$ , то есть  $R$  — область целостности.  $\square$

**Определение 32.** Пусть  $X$  — многообразие,  $P \in X$ . Точка  $P$  называется *неособой*, если  $\mathcal{O}_P$  регулярно. Многообразие  $X$  называется *неособым*, если каждая его точка неособая. Точка, в которой локальное кольцо нерегулярно, называется *особой точкой*.

В случае  $\mathbb{k} = \mathbb{k}^{\text{alg}}$  также есть следующие синонимичные понятия: *точки гладкости* (синоним неособой точки), многообразие — *гладкое*, если все его точки — точки гладкости, а в противном случае многообразие содержит *точки негладкости*.

### 3.3 Разложение в ряд Тейлора

Пусть  $X$  — многообразие,  $P \in X$ . Возьмём  $f \in \mathcal{O}_P$ , тогда ясно, что  $f - f(P) \in \mathfrak{m}_P$ . Так как идеал  $\mathfrak{m}_P$  конечно порождён, мы можем выбрать какую-то систему образующих  $\mathfrak{m}_P = (u_1, \dots, u_n)$ . Тогда

$$f - f(P) = g_1 u_1 + \dots + g_n u_n, \quad g_i \in \mathcal{O}_P.$$

Аналогично,  $g_i \in g_i(P) + \mathfrak{m}_P$ , тогда

$$f - f(P) - \sum_{i=1}^n g_i(P)u_i \in \mathfrak{m}_P^2 \implies f - f(P) - \sum_{i=1}^n g_i(P)u_i = \sum_{i,j=1}^n h_{ij}u_iu_j, \quad h_{i,j} \in \mathcal{O}_P.$$

Продолжая в том же духе мы получаем, что

$$\forall g \in \mathcal{O}_P : \exists F_0 + F_1 + \dots \in \mathbb{k}[[x_1, \dots, x_n]] : f - \sum_{i=0}^s F_i(u_1, \dots, u_n) \in \mathfrak{m}_P^{s+1} \quad \forall s \in \mathbb{N},$$

где  $F_i$  — однородный многочлен степени  $i$  от переменных  $x_1, \dots, x_n$ .

**Определение 33.** Полученное выше представление называется *рядом Тейлора* для функции  $f$  относительно системы локальных параметров  $u_1, \dots, u_n$ .

Ответим сразу на естественный вопрос о единственности такого представления.

**Теорема 17.** Пусть  $X$  — многообразие,  $P \in X$  — неособая точка,  $a \dim \mathcal{O}_P = n$ . Выберем систему образующих  $\mathfrak{m} = (u_1, \dots, u_n)$  и рассмотрим функцию  $f \in \mathcal{O}_P$ . Тогда существует единственный ряд Тейлора для функции  $f$  относительно системы  $(u_1, \dots, u_n)$ .

*Доказательство.* Докажем сначала вот такую лемму:

**Лемма 8.** Пусть  $F$  —  $s$ -форма от  $x_1, \dots, x_n$  с коэффициентами из поля  $\mathbb{k}$ . Предположим, что  $F(u_1, \dots, u_n) \in \mathfrak{m}_P^{s+1}$ . Тогда  $F \equiv 0$ .

*Доказательство леммы.* 1) Предположим сначала, что  $F(0, \dots, 0, 1) = [u_n^s]F \neq 0$ . Так как  $a_n u_n^s + \dots \in \mathfrak{m}_P^{s+1}$ ,  $a_n u_n^s + \dots = G(u_1, \dots, u_n)$ , где  $G$  — форма степени  $s$  с коэффициентами из  $\mathfrak{m}_P$ .

$$G(u_1, \dots, u_n) = H_0 u_n^s + H_1 u_n^{s-1} + \dots + H_s, \quad \text{где}$$

$H_i$  — форма от  $x_1, \dots, x_{n-1}$  степени  $i$ . Тогда

$$\underbrace{\left( \underbrace{a_n}_{\in \mathbb{k}^\times} - \underbrace{H_0(u_1, \dots, u_{n-1})}_{\in \mathfrak{m}_P} \right)}_{\in \mathfrak{m}_P} u_n^s \in (u_1, \dots, u_{n-1}) \implies u_n^s \in (u_1, \dots, u_{n-1}),$$

так как  $\underbrace{\left( \underbrace{a_n}_{\in \mathbb{k}^\times} - \underbrace{H_0(u_1, \dots, u_{n-1})}_{\in \mathfrak{m}_P} \right)}_{\in \mathfrak{m}_P} \in \mathcal{O}_P^*$ . Значит, мы получаем

$$\mathfrak{m}_P^s \subset (u_1, \dots, u_{n-1}) \subset \mathfrak{m}_P,$$

но тогда по лемме 15 мы имеем  $\dim \mathcal{O}_P = n - 1$ , что приводит к противоречию.

2) В общем случае сделаем замену переменных: возьмём

$$G(u_1, \dots, u_n) = F(\alpha_{11}u_1 + \dots + \alpha_{1n}u_n, \dots, \alpha_{n1}u_1 + \dots + \alpha_{nn}u_n)$$

где  $(\alpha_{ij}) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{k})$  и

$$G(0, \dots, 0, 1) = F(\alpha_{1n}, \dots, \alpha_{nn}) \neq 0$$

и таким образом сведём ситуацию к 1). □

Теперь докажем теорему. Так как нас интересует лишь вопрос единственности, достаточно показать, что у нулевой функции ряд Тейлора также будет нулевым. Пусть  $F_0 + F_1 + \dots$  — ряд Тейлора для нуля. Так как функция 0 (очевидно) обнуляется в точке  $P$ , из определения и леммы мы имеем

$$F_0(u_1, \dots, u_n) \in \mathfrak{m}_P, \implies F_0 \equiv 0.$$

Пусть теперь  $s = 1$ . Тогда, так как  $F_0 = 0$ , отсюда

$$F_1(u_1, \dots, u_n) \in \mathfrak{m}_P^2 \implies F_1 \equiv 0$$

по лемме. Продолжая пользоваться леммой мы получаем, что  $F_j \equiv 0$ .  $\square$

Итак, выбор системы образующих  $\mathfrak{m}_P = (u_1, \dots, u_n)$  определяет гомоморфизм

$$\tau: \mathcal{O}_P \rightarrow \mathbb{k}[[x_1, \dots, x_n]].$$

Естественно задуматься о том, каково его ядро. Нетрудно видеть, что

$$\tau(f) = 0 \iff f \in \bigcap_{s \in \mathbb{N}} \mathfrak{m}^s,$$

что мотивирует изучить, как устроен идеал справа. Оказывается, в нашем случае он устроен не слишком уж сложно.

**Теорема 18.** *Пусть  $A$  — локальное нётерово кольцо с максимальным идеалом  $\mathfrak{m}$ . Тогда*

$$\bigcap_{s \in \mathbb{N}} \mathfrak{m}^s = 0.$$

*Доказательство.* Рассмотрим  $\alpha \in \bigcap_{s \in \mathbb{N}} \mathfrak{m}^s$ . Для каждого  $k \in \mathbb{N}$  найдётся такой  $F_k$ , что  $\alpha = F_k(u_1, \dots, u_n)$ , где  $F_k$  — однородный многочлен из  $A[x_1, \dots, x_n]$  степени  $k$ .

Так как  $A[x_1, \dots, x_n]$  нётерово, то по теореме Гильберта о базисе:  $\exists s \in \mathbb{N}$ :

$$(F_1, F_2, \dots, F_k, \dots) = (F_1, \dots, F_s).$$

Но это в частности значит, что

$$F_{s+1} = G_1 F_1 + \dots + G_s F_s, \quad G_i \in A[x_1, \dots, x_n], \deg G_i = s+1-i$$

и  $G_i$  однородные. Подставляя  $u_1, \dots, u_n$ , получаем:

$$\alpha = F_{s+1}(u_1, \dots, u_n) = \alpha(G_1(u) + \dots + G_s(u)) \implies \alpha = \alpha\beta, \beta \in \mathfrak{m}.$$

Тем самым,  $\alpha(1-\beta) = 0$ , и сокращая на  $1-\beta$  — обратимый элемент  $A$  — мы получаем  $\alpha = 0$ .  $\square$

Таким образом, как мы видим, ядро построенного выше гомоморфизма тривиально и  $\mathcal{O}_P \hookrightarrow \mathbb{k}[[x_1, \dots, x_n]]$ , откуда сразу следует целостность кольца  $\mathcal{O}_P$ . Таким же образом можно попытаться доказать факториальность  $\mathcal{O}_P$ . Однако, во-первых, надо начать с доказательства факториальности  $\mathbb{k}[[x_1, \dots, x_n]]$ , а, во-вторых, подкольцо факториального кольца совсем не обязано быть факториальным, так что нужны дополнительные слова.

Отметим также, что из леммы 8 можно извлечь достаточно полезное следствие. А именно, рассмотрим градуированное кольцо

$$\bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathfrak{m}_P^k / \mathfrak{m}_P^{k+1}.$$

В случае, если  $P$  — неособая точка, мы можем рассмотреть гомоморфизм

$$\mathbb{k}[[x_1, \dots, x_n]] \rightarrow \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathfrak{m}_P^k / \mathfrak{m}_P^{k+1}, \quad x_i \mapsto u_i.$$

Из леммы следует, что это мономорфизм, а сюръективность очевидна. Значит, мы доказали такое следствие.

**Следствие 13.** *Пусть  $P \in X$  — неособая точка. Тогда имеет место следующий изоморфизм  $\mathbb{k}$ -алгебр:*

$$\bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathfrak{m}_P^k / \mathfrak{m}_P^{k+1} \cong \mathbb{k}[[x_1, \dots, x_n]]$$

В частности, отсюда следует, что на неособом многообразии градуированная алгебра

$$\bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathfrak{m}_P^k / \mathfrak{m}_P^{k+1}$$

не зависит от выбора точки  $P$  (что вообще говоря неочевидно).

### 3.4 Локальное кольцо точки на неособой кривой. Индексы ветвления и степень инерции.

Рассмотрим неособую проективную кривую  $X$  и точку  $P \in X$ . Мы знаем, что в силу того, что кривая неособая,  $\dim \mathcal{O}_P = \dim_{\mathbb{k}} \mathfrak{m}_P / \mathfrak{m}_P^2$ , а из этого условия по лемме Накаямы следует, что идеал  $\mathfrak{m}_P$  главный.

Кольцо  $\mathcal{O}_P$  в этом случае — дискретно нормированное кольцо и с каждой точкой кривой у нас ассоциировано нормирование  $v_P$  поля  $\mathbb{k}(X)$ .

Пусть теперь  $\varphi: Y \rightarrow X$  — морфизм неособых кривых и  $\varphi^{-1}(P) = \{Q_1, \dots, Q_n\}$ . Попробуем понять, как же связаны нормирования  $v_P$  и  $v_{Q_i}$ . Ясно, что в этом случае для любой точки  $Q_i$  есть расширение колец  $\varphi^*: \mathcal{O}_P \rightarrow \mathcal{O}_{Q_i}$  и  $\mathfrak{m}_P \subset \mathfrak{m}_{Q_i}$ ,  $\mathfrak{m}_P = \mathfrak{m}_{Q_i} \cap \mathcal{O}_P$ . И видно, что в этой ситуации нормирования  $v_{Q_i}$  продолжают нормирование  $v_P$ . Действительно, мы можем рассмотреть функцию

$$\psi: \mathcal{O}_P \rightarrow \mathbb{Z}, \psi(f) = v_{Q_i}(\varphi^*(f))$$

для которой легко проверить, что  $\psi(f \cdot g) = \psi(f) + \psi(g)$  и  $\psi(f + g) \geq \min(\psi(f), \psi(g))$ . Возможно,  $\psi$  не сюръективна, но так как  $f(P) = 0 \iff \varphi^*(f)(P) = 0$ , то  $\psi(f) > 0 \iff v_P(f) > 0$ . Отсюда ясно, что  $\exists e > 0$ :

$$v_{Q_i} = e \cdot v_P.$$

Число  $e$  в этом контексте называют *индексом ветвления* и обозначают  $e = e(\mathcal{O}_{Q_i} / \mathcal{O}_P)$ . Сразу видно, что индекс ветвления можно вычислить вот так:

$$v_{Q_i}(\pi_P) = e(\mathcal{O}_{Q_i} / \mathcal{O}_P),$$

где  $(\pi_P) = \mathfrak{m}_P$  — локальный параметр для кольца  $\mathcal{O}_P$ . Или, иными словами, такой элемент, что  $v_P(\pi_P) = 1$ .

**Теорема 19.** *Оказывается, в такой ситуации  $e_1 + \dots + e_n = [\mathbb{k}(Y) : \mathbb{k}(X)]^{12}$ .*

### 3.5 Конечные морфизмы и нормализация многообразия

**Теорема 20.** *Пусть  $L/K$  — сепарабельное конечное расширение, кольцо  $A \subset K$  и  $K = \text{Frac}(A)$ . Пусть  $B = \text{Int}_L A$  и предположим, что  $A$  нётерово и целозамкнуто<sup>13</sup> (в своём поле частных).*

*Тогда  $B$  — конечно порождённый  $A$ -модуль.*

*Доказательство.* Это доказывается стандартным образом.

Во-первых, из следующей несложной леммы очевидно, что  $L = \text{Frac}(B)$ .

**Лемма 9.** Для любого  $x \in L$  существует  $a \in A^\times$ :  $ax \in B$ .

*Доказательство.* Так как расширение  $L/K$  конечно, то  $x$  алгебраичен над  $K$ . Значит, имеется зависимость  $x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \dots + c_0 = 0$  для некоторых  $c_i \in K$ . Домножая на знаменатели, получим зависимость вида  $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0 = 0$  для некоторых  $a_i \in A$ , причём  $a_n \neq 0$ . Видно, что  $a_nx_n$  — целый над  $A$  элемент (чтобы явно получить зависимость, надо уравнение домножить на  $a_n^{n-1}$ ).  $\square$

Возьмём  $\{\omega_i\}_{i=1}^n$  — базис  $L/K$ , причём выберем  $\omega_i \in B$  (что возможно по лемме 9). Рассмотрим билинейную форму следа

$$L \times L \rightarrow K, \quad (x, y) \mapsto \text{Tr}(xy).$$

Из курса теории полей известно, что так как расширение сепарабельно, то эта форма невырождена. Возьмём двойственный базис к  $\omega_i$ , то есть рассмотрим такой набор  $\{\omega_i^*\}$ , что

$$\text{Tr}(\omega_i \omega_j^*) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Имеем следующие включения

$$A\omega_1 \oplus \dots \oplus A\omega_n \subset B \subset A\omega_1^* \oplus \dots \oplus A\omega_n^*.$$

Первое включение очевидно, докажем второе. Пусть  $b = a_1\omega_1^* + \dots + a_n\omega_n^*$ , где  $a_i \in K$ , мы покажем, что  $a_i \in A$ . С одной стороны,

$$a_i = \text{Tr}(b\omega_i).$$

Пусть  $G = \{\sigma: L \rightarrow K^{\text{alg}}\}$  — все вложения  $L$  в  $K^{\text{alg}}$ . Если  $\alpha$  цел над  $A$ , то  $\sigma\alpha$  цел над  $A$  (это тривиальная проверка), а тогда и  $\text{Tr}(\alpha)$  цел над  $A$ , так как

$$\text{Tr}(\alpha) = \sum_{\sigma \in G} \sigma\alpha.$$

<sup>12</sup>Об этом написано в книге «Алгебраическая Геометрия» Хартсхорна, Г. 2, §6, предложение 6.9. Это верно, если  $\varphi: Y \rightarrow X$  — конечный морфизм, и доказательство этого, насколько понимает редактор, идёт ниже, вплоть до 22

<sup>13</sup>также говорят нормально;  $A$  — область целостности, так что нормальность и целозамкнутость — синонимы.

Так как  $\text{Tr}(b\omega_i) \in K$  цело над  $A$ , то из целозамкнутости  $A$ :  $a_i = \text{Tr}(b\omega_i) \in A$ . Мы получили, что  $B$  — подмодуль конечно порождённого модуля над нётеровым кольцом, откуда  $B$  — конечно порождённый  $A$ -модуль.  $\square$

Теперь опустим требование сепарабельности расширения ценой конкретизации ситуации: в дальнейшем  $A$  будет не произвольной нётеровой областью целостности, а целостной аффинной  $\mathbb{k}$ -алгеброй.

**Теорема 21.** *Пусть  $A$  — целостная аффинная алгебра,  $K = \text{Frac}(A)$ , а  $L/K$  — конечное расширение. Обозначим  $B = \text{Int}_L A$ . Тогда  $B$  — конечно порождённый  $A$ -модуль.*

*Доказательство.* По лемме Нётер о нормализации,  $A$  — конечное расширение кольца многочленов  $\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ . Так как  $B$  цело на  $A$ , оно цело и над  $\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ , откуда  $B = \text{Int}_L \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ .

Кроме того, расширение  $L/\text{Frac}(\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n])$  конечное (это следует из такой леммы):

**Лемма 10.** Пусть  $\varphi: A \hookrightarrow B$  — конечное расширение. Тогда расширение  $\text{Frac}(B)/\text{Frac}(A)$  конечное.

*Доказательство.* Рассмотрим мультипликативное подмножество  $S = A \setminus \{0\}$ . Согласно 29,  $\text{Frac}(A) = S^{-1}A \hookrightarrow \varphi(S)^{-1}B$  конечное. С другой стороны, так как  $\varphi(S)^{-1}B$  — конечная область целостности над полем  $\text{Frac}(A)$ , оно является полем 30, в которое вкладывается  $B$ . Согласно универсальному свойству поля частных оно совпадает с  $\text{Frac}(B)$ , и мы получили, что расширение  $\text{Frac}(B)/\text{Frac}(A)$  конечное.  $\square$

Из этих рассуждений следует, что мы без ограничений общности можем полагать, что  $A = \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ .

Кроме того, без ограничений общности мы можем полагать, что расширение  $L/K$  нормальное, так как если мы перейдём к нормальному замыканию  $\tilde{L}/K$  и докажем теорему для него и для  $\tilde{B} = \text{Int}_{\tilde{L}} A \supset B$ , то мы докажем теорему и для  $B$ .

Пусть  $G = \{\sigma: L \rightarrow K^{\text{alg}}\}$ . Так как  $L/K$  нормально, то  $\forall \sigma \in G: \sigma(L) \subset L$  и мы можем рассмотреть башню расширений:

$$\begin{array}{c} L \\ \downarrow \\ L^G = F \\ \downarrow \\ K \end{array}$$

где верхний этаж — расширение Галуа, а нижний — чисто несепарабельное расширение<sup>14</sup>.

<sup>14</sup>В характеристике 0 все расширения сепарабельны; там окажется  $F = K$ .

Введём соответствующие кольца целых  $\mathcal{O}_L = \text{Int}_L A$  и  $\mathcal{O}_F = \text{Int}_F A$ . Они образуют башню расширений колец

$$\begin{array}{c} \mathcal{O}_L = \text{Int}_L A \\ | \\ \mathcal{O}_F = \text{Int}_F A \\ | \\ A \end{array}$$

Так как расширение  $L/F$  сепарабельно, а  $\mathcal{O}_F$  целозамкнуто, то мы можем применить теорему 20 и получить, что  $\mathcal{O}_L$  — конечно порождённый  $\mathcal{O}_F$ -модуль.

Далее, из общей теории полей следует, что чисто несепарабельное расширение устроено следующим образом:

$$F = \mathbb{k}\left(y^{\frac{1}{p^{m_1}}}, \dots, y^{\frac{1}{p^{m_s}}}\right), \text{ где } y_i \in A, p = \text{char } \mathbb{k}.$$

Возьмём  $m = \max m_i$ , запишем  $y_i = \sum_I a_I x^I$  (где  $I$  — мультииндекс), и извлечём корень

$$y_i^{\frac{1}{p^m}} = \sum a_I^{\frac{1}{p^m}} x^{I/p^m}, \quad (5)$$

так как в характеристике  $p$ :

$$\left(\sum a_I^{\frac{1}{p^m}} x^{\frac{I}{p^m}}\right)^{p^m} = \sum \left(a_I^{\frac{1}{p^m}} x^{\frac{I}{p^m}}\right)^{p^m}$$

а так как поле  $\mathbb{k}$  алгебраически замкнуто, то все  $a_I^{\frac{1}{p^m}} \in \mathbb{k}$ . Итак, из (5) следует, что

$$F \subset \mathbb{k}\left(x_1^{\frac{1}{p^m}}, \dots, x_n^{\frac{1}{p^m}}\right).$$

Тем самым, если мы докажем теорему для  $\mathbb{k}\left(x_1^{\frac{1}{p^m}}, \dots, x_n^{\frac{1}{p^m}}\right)$ , то мы докажем её и для  $F$ , так что далее без ограничений общности можно полагать, что

$$F = \mathbb{k}\left(x_1^{\frac{1}{p^m}}, \dots, x_n^{\frac{1}{p^m}}\right).$$

Теперь убедимся, что  $\mathcal{O}_F = \mathbb{k}\left[x_1^{\frac{1}{p^m}}, \dots, x_n^{\frac{1}{p^m}}\right] =: R$ . Включение  $R \subset \mathcal{O}_F$  очевидно. Пусть  $\alpha \in \mathcal{O}_F$ , то есть  $\alpha$  цел над  $A$ , значит он цел и над  $R$ , откуда  $\alpha \in R$  (так как  $R$  целозамкнуто и расширение  $R/A$  конечно<sup>15</sup>).

Итак, мы показали, что  $\mathcal{O}_F/R$  конечно (а так как  $R/A$  конечно и  $\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_F$  конечно), из этого следует теорема.  $\square$

**Определение 34.** Если в предыдущей теореме  $L = K$ , то  $B$  называется *нормализацией*  $A$ .

<sup>15</sup>Его базис состоит из мономов вида  $x_1^{k_1/p^m} \cdot \dots \cdot x_n^{k_n/p^m}$  по  $0 \leq k_i \leq p^m - 1$

**Пример 11.** Пусть  $A = \mathbb{k}[x, y]/(y^2 - x^3)$ . Это кольцо не целозамкнуто:  $(\frac{y}{x})^2 = x$ , но  $\frac{y}{x} \notin A$ . Обозначая  $t := \frac{y}{x}$ , видим наличие вложения  $A \hookrightarrow \mathbb{k}[t]$ ,  $x \mapsto t^2$ ,  $y \mapsto t^3$ . При этом  $\mathbb{k}[t]$  — конечный  $A$ -модуль, и  $\mathbb{k}[t]$  уже целозамкнуто. Можно показать, что  $\mathbb{k}[t]$  — нормализация  $A$ .

*Замечание 26.* Отметим, что в этом случае  $B$  является аффинной  $\mathbb{k}$ -алгеброй, так как она целостна, и к тому же — конечно порождённый модуль над какой-то другой аффинной  $\mathbb{k}$ -алгеброй.

**Определение 35.** Пусть  $X$  — аффинное многообразие. Тогда  $X$  называется *нормальным*, если  $X = \text{Specm}(A)$ , где  $A$  — нормальное.

Таким образом, аффинное многообразие  $X$  может быть нормальным, а может — не быть. Во втором случае теорема 21 говорит, что существует аффинное нормальное многообразие  $Y$ , и конечный морфизм (вложение)  $A(X) \rightarrow A(Y)$ . Он, кстати, порождает  $Y \rightarrow X$  в силу антиэквивалентности категорий.

Теперь обобщим данную ситуацию на случай произвольных (необязательно аффинных) многообразий.

**Определение 36.** Пусть  $\varphi: Y \rightarrow X$  — морфизм многообразий. Предположим, что у любой точки  $x \in X$  есть такая аффинная окрестность  $U_x$ , что  $\varphi^{-1}(U_x) \cong V_x$ , где  $V_x \subset Y$  — аффинная, и расширение  $A(U_x) \hookrightarrow A(V_x)$  конечно. Тогда  $\varphi$  называется *конечным морфизмом*.

**Определение 37.** Неприводимое многообразие  $X^{16}$  называют *нормальным*, если  $\forall P \in X$ : кольцо  $\mathcal{O}_P$  нормально.

**Предложение 24.** *Предыдущие два определения нормальности согласованы.*

*Доказательство.* Нам нужно доказать следующее утверждение:  $A$  нормально, если и только если  $\forall \mathfrak{m} \in \text{Specm}(A)$  кольцо  $A_{\mathfrak{m}}$  нормально (для целостного кольца  $A$ ).

Легко убедиться, что любая локализация целозамкнутого кольца целозамкнута.

Обратно, покажем, что  $A = \bigcap_{\mathfrak{m} \in \text{Specm}(A)} A_{\mathfrak{m}}$ . Включение слева направо очевидно. Пусть  $x \in \bigcap_{\mathfrak{m} \in \text{Specm}(A)} A_{\mathfrak{m}}$ . Рассмотрим множество  $I := \{a \in A \mid xa \in A\}$ , очевидно, что это идеал. При этом для всякого  $\mathfrak{m} \in A : x \in A_{\mathfrak{m}}$ , так что  $x$  представим в виде  $r/s$ , где  $s \notin \mathfrak{m}$ , откуда  $I \not\subseteq \mathfrak{m}$ . Тем самым,  $I = (1)$ , то есть  $x \in A$ .

Так как каждое кольцо в правой части целозамкнуто, и само  $A$  целозамкнуто.  $\square$

*Замечание 27.* Тем самым,  $X$  нормально, если локальное кольцо в каждой точке нормально. Понятно, что достаточно требовать существования покрытия аффинными картами, такого, что аффинная алгебра каждой карты нормальна.

*Замечание 28.* Если  $X$  — неособое (гладкое) многообразие, то все его локальные кольца регулярны. Можно доказать, что регулярное кольцо факториально, а факториальное кольцо очевидным образом нормально.

Тем самым, все неособые многообразия нормальны.

Обратное неверно: конус  $\{x^2 + y^2 = z^2\} \subset \mathbb{A}^3$  — нормальное многообразие, но имеет особенность в  $(0, 0, 0)$ .

<sup>16</sup>Уже не обязательно аффинное

### 3.6 Морфизмы между неособыми кривыми

**Предложение 25.** Пусть  $X$  — неособая неприводимая кривая, пусть у нас есть рациональное отображение  $f: X \dashrightarrow \mathbb{P}^n$ . Тогда оно регулярно во всех точках.

*Доказательство.* Действительно, рассмотрим открытое  $U \subset X$ , на котором  $f$  — (регулярный) морфизм. Уменьшая окрестность  $U$ , можно считать, что  $f(U)$  попадает в аффинную карту: если рассмотреть  $f$ , как отображение  $U \rightarrow \mathbb{A}_0^n \subset \mathbb{P}^n$ , то  $f$  мы можем записать, как

$$u \mapsto (1 : f_1(u) : f_2(u) : \dots : f_n(u)) = (f_0(u) : f_1(u) : f_2(u) : \dots : f_n(u)), \quad f_i \text{ — регулярны на } U.$$

Тогда  $f_i \in \mathbb{k}(X)$ . Рассмотрим  $P \in X$ , понятно, что  $\mathcal{O}_P \subset \mathbb{k}(X)$ . Так как кривая  $X$  неособая, то  $\mathcal{O}_P$  — дискретно нормированное кольцо. Обозначим соответствующее дискретное нормирование за  $v_P$ , пусть  $k_i = v_P(f_i)$ , а  $k = \min_i \{k_i\}$ . В силу симметрии, мы можем считать, что минимум достигается при  $i = 0$ . Тогда мы можем записать каждую функцию, как

$$f_i = t^{k_i} g_i,$$

где  $t$  — локальный параметр, то есть образующая  $\mathfrak{m}_P$  (или же, такой элемент, что  $v_P(t) = 1$ ), и  $v_P(g_i) = 0$ . Разделим каждую координату на  $t^{k_0}$ . Так мы получим эквивалентное рациональное отображение  $X \dashrightarrow Y$ , имеющее вид

$$u \mapsto (g_0(u) : t^{k_1-k_0} g_1(u) : \dots : t^{k_n-k_0} g_n(u)).$$

Заметим, что  $v_P(g_0) = 0$ , то есть  $g_0 \in \mathcal{O}_P^*$ , то есть  $g_0 \notin \mathfrak{m}_P$ . Это означает, что  $g_0$  определена в точке  $P$  и не обращается в 0 в ней (и даже в некоторой окрестности этой точки). Для остальных  $i$  мы получаем, что  $v_P(g_i) \geq 0 \implies g_i \in \mathcal{O}_P$ , то есть они регулярны в некоторой окрестности  $P$ . Тем самым, отображение определено в некоторой окрестности точки  $P$  и точка  $P$  является точкой регулярности (так как в её окрестности не все координаты равны нулю). По произвольности точки  $P$  мы имеем нужное.  $\square$

При помощи этого утверждения также можно доказать, что эллиптическая кривая не бирационально изоморфна  $\mathbb{P}^1$ .

Предположим противное, пусть у нас есть рациональное отображение  $C \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ , и обратное ему  $\mathbb{P}^1 \dashrightarrow C$ . В силу предыдущего предложения мы можем полагать, что оба эти отображения — регулярные морфизмы. Получили композицию

$$C \xrightarrow{f} \mathbb{P}^1 \xrightarrow{g} C,$$

где  $f, g$  — регулярные изоморфизмы, причём на некотором открытом множестве  $g \circ f = \text{id}$  и  $f \circ g = \text{id}$ .

**Лемма 11.** Если  $h_1, h_2: X \rightarrow Y$  — морфизмы,  $X$  неприводимо и  $h_1$  совпадает с  $h_2$  на некотором открытом  $U \subset X$ , то  $h_1 = h_2$ .

*Доказательство.* Рассмотрим диагональное  $X \xrightarrow{h_1 \times h_2} Y \times Y$ . По условию  $(h_1 \times h_2)(U) \subset \Delta(Y)$ , а в силу плотности  $U \subset X$  и замкнутости диагонали,  $(h_1 \times h_2)(X) \subset \Delta(Y)$ .  $\square$

Итак, из бирациональной эквивалентности неособых проективных кривых  $C \cong \mathbb{P}^1$  получается обычный изоморфизм  $C \cong \mathbb{P}^1$  в категории  $\text{Proj}$ . Так как группа автоморфизмов  $\mathbb{P}^1$  действует на ней транзитивно, то не умаляя общности, можно считать, что  $\infty \mapsto \infty$ . Выкидывая бесконечно удалённые точки, достаточно доказывать, что аффинная эллиптическая кривая не может быть изоморфна  $\mathbb{A}^1$ . Чтобы доказать это, можно посмотреть на кольца регулярных функций — оказывается, кольцо регулярных функций на эллиптической кривой не факториально.

### 3.7 Морфизмы между неособыми проективными неприводимыми кривыми

Пусть  $f : Y \rightarrow X$  — морфизм между неособыми проективными неприводимыми кривыми.

Образ  $f(Y) \subset X$  замкнут, и отбрасывая неинтересный случай одноточечного образа, получаем  $f(Y) = X$ . Морфизм алгебраических многообразий  $f$  индуцирует морфизм полей частных  $\mathbb{k}(X) \rightarrow \mathbb{k}(Y)$ . Так как  $\text{tr.deg}_{\mathbb{k}} \mathbb{k}(X) = \text{tr.deg}_{\mathbb{k}} \mathbb{k}(Y) = 1$ , то расширение алгебраично. В силу конечной порождённости обоих полей над  $\mathbb{k}$  (это поля частных аффинных алгебр) получаем, что расширение полей конечно.

Покроем  $X$  аффинными картами:  $X = \bigcup_i \text{Specm } A_i$ .

**Теорема 22.** *Оказывается,  $f^{-1}(\text{Specm } A_i) \cong \text{Specm } \text{Int}_{\mathbb{k}(Y)} A_i$ .*

*Доказательство.* Пусть  $A = A_i$ , положим  $B := \text{Int}_{\mathbb{k}(Y)} A$ . Мы находимся в ситуации 21, значит,  $B$  — нормальная целостная аффинная алгебра, конечная над  $A$ , причём  $\text{Frac}(B) \cong \mathbb{k}(Y)$ . В силу антиэквивалентности категорий, существует бирациональный изоморфизм  $\varphi : \text{Specm } B \dashrightarrow Y$ .

Ещё раз используя, что  $\text{Frac}(B) \cong \mathbb{k}(Y)$ , получаем в силу 2,  $\dim B = 1$ , и в силу нормальности  $B$  — дедекиндовское кольцо. Значит,  $\text{Specm } B$  — неособая кривая<sup>17</sup>, и  $\varphi$  продолжается до регулярного морфизма  $\varphi : \text{Specm } B \rightarrow Y$ .

Следующим шагом покажем, что этот морфизм  $\varphi : \text{Specm } B \rightarrow Y$  — изоморфизм на образ.

- В силу того, что  $\varphi : \text{Specm } B \dashrightarrow Y$  — бирациональный изоморфизм, существует рациональный морфизм  $\varphi^{-1} : Y \rightarrow \text{Specm } B$ . Пусть  $\text{Specm } B \subset \mathbb{A}^n$ , в таком случае можно скомпоновать  $\varphi^{-1}$  с координатными проекциями  $\pi_j : \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{k}$ , и получить координатное задание:  $\varphi^{-1}(y) = (g_1(y), \dots, g_n(y))$ , где  $g_i \in \mathbb{k}(Y)$  — рациональные функции.
- Чтобы проверить наличие обратного регулярного отображения, необходимо убедиться, что все  $g_i$  регулярны во всех точках  $\text{Im } \varphi$ . Выберем какую-нибудь точку  $y_0 = \varphi(x_0)$ , и проверим регулярность  $g_i$  в ней. Предположим противное:  $v_{y_0}(g_i) < 0$ , то есть  $\frac{1}{g_i} \in \mathfrak{m}_{y_0}$ . Ясно, что  $\varphi^*(\mathfrak{m}_{y_0}) \subset \mathfrak{m}_{x_0}$ , тем самым, получаем, что  $\frac{1}{\pi_i} = \varphi^*(\frac{1}{g_i}) \in \mathfrak{m}_{x_0}$ , то есть  $v_{x_0}(\pi_i) < 0$ . Но координатная проекция  $\pi_i$  регулярна в точке  $x_0$ , откуда мы получаем противоречие.
- Итак,  $\varphi^{-1} : \text{Im } \varphi \rightarrow \text{Specm } B$  — обратный к  $\varphi$  регулярный морфизм. То, что они действительно взаимно обратны, следует, например, из 11.

В дальнейшем можем отождествить  $\text{Specm } B$  с  $\text{Im } \varphi$ , и рассматривать  $\text{Specm } B \subset Y$ . Теперь приступим к доказательству теоремы: проверим, что  $\text{Specm } B = f^{-1}(\text{Specm } A)$ .

- Зафиксируем точку  $P \in \text{Specm } A$ , и пусть точки  $Q_1, \dots, Q_m \in \text{Specm } B$  — её прообразы относительно  $f$ . Отображение  $f^*$  задаёт морфизмы  $f^* : \mathcal{O}_P \rightarrow \mathcal{O}_{Q_i}$ , и мы оказываемся в ситуации теоремы 19. А именно, определены индексы ветвления  $e_i = e(\mathcal{O}_{Q_i}/\mathcal{O}_P)$ , и теорема говорит, что  $e_1 + \dots + e_m = [\mathbb{k}(Y) : \mathbb{k}(X)]$ .

<sup>17</sup>дедекиндовость можно было и не упоминать, это сразу следует из нормальности  $B$ .

- Пойдём от противного: пусть  $\exists Q \notin \text{Specm } B : f(Q) = P$ . Тут тоже есть  $f^* : \mathcal{O}_P \rightarrow \mathcal{O}_Q$ , и опять же есть индекс ветвления  $e = e(\mathcal{O}_Q/c\mathcal{O}_P)$ . Получим противоречие, показав, что  $s := e + e_1 + \dots + e_m \leq [\mathbb{k}(Y) : \mathbb{k}(X)]$ . Дальше идёт рассуждение, идентичное доказательству теоремы 25, и так как оно там оформлено более аккуратно, то закончим доказательство ссылкой.

□

## 4 Дивизоры

### 4.1 Дивизоры Вейля

Начнём с такого примера:

**Пример 12.** Как мы увидим через секунду, все нормирования на  $\mathbb{k}(t) = \mathbb{k}(\mathbb{P}^1)$ , тривиальные на  $\mathbb{k}$ , соответствуют точкам  $\alpha \in \mathbb{k}$  и  $\infty$ . Если говорить конкретнее, то любая рациональная функция на  $\mathbb{P}^1$  имеет вид

$$f(t) = C \cdot \frac{(t - \alpha_1)^{k_1} \cdot \dots \cdot (t - \alpha_m)^{k_m}}{(t - \beta_1)^{s_1} \cdot \dots \cdot (t - \beta_n)^{s_n}}$$

и тогда мы имеем

$$v_\gamma(f) = \begin{cases} 0, & \gamma \neq \alpha_j, \beta_j \\ k_i & \gamma = \alpha_i \\ s_j, & \gamma = \beta_j \end{cases}, \quad v_\infty = s_1 + \dots + s_n - k_1 - \dots - k_m.$$

В частности мы видим, что

$$\forall f \in \mathbb{k}(\mathbb{P}^1) \quad \sum_{P \in \mathbb{P}^1} v_P(f) = 0.$$

Это наблюдение можно обобщить на произвольную неособую проективную кривую  $X$ .

**Предложение 26.** *Все нормирования на  $\mathbb{k}(t)$ , тривиальные на  $\mathbb{k}$ , имеют такой вид.*

*Доказательство.* Пусть  $v$  — нормирование на  $\mathbb{k}(t)$ . Выберем  $f \in \mathbb{k}(X)$  такой, что  $v(f) \neq 0$ , и разложим  $f$  на неприводимые:  $f = (t - \alpha_1)^{n_1} \cdot \dots \cdot (t - \alpha_n)^{n_k}$ , где  $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{Z}$ . Так как  $v(f) \neq 0$ , то найдётся множитель  $t - \alpha$  такой, что  $v(t - \alpha) \neq 0$ . В силу 28,  $v(t - \beta) = \min\{v(t - \alpha), 0\}$  для  $\beta \neq \alpha$ . Отсюда мы получаем все нормирования на  $\mathbb{k}(t)$  — если  $v(t - \alpha) > 0$ , то будет нормирование в  $\alpha$ , иначе нормирование на бесконечности. □

Пусть  $X$  — неособая проективная кривая (и в дальнейшем всегда так).

**Определение 38.** *Дивизор на  $X$  — это формальная целочисленная линейная комбинация  $\sum_{P \in X} n_P \cdot P$ , где  $n_P \in \mathbb{Z}$ , и почти все из них равны нулю.*

Иными словами, группа дивизоров  $\text{Div}(X)$  на кривой  $X$  — это свободная абелева группа, порожденная точками кривой.

Рассмотрим произвольную рациональную функцию  $f \in \mathbb{k}(X)^*$ ; в кольце  $\mathcal{O}_P$  она представима в виде  $f = z_P^{v_P(f)} \cdot f_0$ , где  $(z_P) = \mathfrak{m}_P$  — локальный параметр, а  $f_0 \in \mathcal{O}_P^*$  (так как кривая неособая и локальное кольцо каждой точки регулярно).

**Определение 39.** Пусть  $f \in \mathbb{k}(X)^*$  — ненулевая рациональная функция на кривой  $X$ . Её *дивизором* называют

$$\text{div}(f) = \sum_{p \in X} v_p(f) \cdot p$$

А *дивизором нулей* и *дивизором полюсов* называют соответственно

$$\text{div}(f)_0 = \sum_{p \in X, v_p(f) > 0} v_p(f) \cdot p, \quad \text{div}(f)_\infty = - \sum_{p \in X, v_p(f) < 0} v_p(f) \cdot p.$$

*Замечание 29.* Нетрудно видеть, что  $\text{div}(f)_\infty = \text{div}(1/f)_0$  и  $\text{div}(f) = \text{div}(f)_0 - \text{div}(f)_\infty$ .

*Замечание 30.* Определение корректно, то есть в суммах конечное число ненулевых слагаемых. Проверим это: пусть  $U \subset X$  — область регулярности  $f$ . Множество нулей  $\{f = 0\}$  замкнуто внутри  $U$ , значит, оно разбивается на конечное множество неприводимых компонент. Так как  $f \neq 0$ , то  $\dim\{f = 0\} < 1$ , и неприводимые компоненты — точки. Тем самым, сумма в определении дивизора нулей действительно конечна. Аналогично поступаем с суммой в определении дивизора полюсов.

**Определение 40.** Степенью  $\deg D$  дивизора  $D$  называется сумма его кратностей.

**Пример 13.** Пусть  $X$  — неособая неприводимая проективная кривая,  $f \in \mathbb{k}(X)^*$ . Рассмотрим морфизм полей  $\mathbb{k}(t) \rightarrow \mathbb{k}(X)$ ,  $t \mapsto f$ . Ему соответствует некоторое доминантное рациональное отображение  $X \rightarrow \mathbb{P}^1$ . Мы доказывали в 25, что это отображение будет регулярным во всех точках. Рассмотрим точку  $P = 0 \in \mathbb{P}^1$  и  $Q_i \in X$  такие, что  $Q_i \mapsto P$  (то есть  $f(Q_i) = 0$ ). Тогда  $v_{Q_i}(f) = e_i v_P(t) = e_i$ . В силу 19,

$$\sum_i e_i = [\mathbb{k}(X) : \mathbb{k}(f)].$$

С другой стороны,  $\{Q_i\} = \{Q \in X \mid v_Q(f) > 0\}$ , то есть дивизор нулей функции  $f$  имеет вид

$$\sum v_{Q_i}(f) \cdot Q_i,$$

откуда мы в частности получаем, что  $\deg(\text{div}(f)_0) = [\mathbb{k}(X) : \mathbb{k}(f)]$ .

**Предложение 27.** Пусть  $X$  — неособая проективная неприводимая кривая,  $f \in \mathbb{k}(X)^\times$ . Тогда  $\text{div}(f)$  — главный, то есть  $\deg(\text{div}(f)_0) = \deg(\text{div}(f)_\infty)$ .

*Доказательство.* Согласно примеру выше,  $\deg(\text{div}(f)_0) = [\mathbb{k}(X) : \mathbb{k}(f)]$ . Аналогично  $\deg(\text{div}(f)_\infty) = \deg(\text{div}(1/f)_0) = [\mathbb{k}(X) : \mathbb{k}(1/f)] = [\mathbb{k}(X) : \mathbb{k}(f)]$ .  $\square$

Доказательство выше использует недоказанную<sup>18</sup> теорему 19, опирающуюся на сложную технику конечных морфизмов, и в связи с этим в следующем семестре лектор приводит другое доказательство. Его можно найти в приложении 5.

Ясно, что  $\text{div}(fg) = \text{div}(f) + \text{div}(g)$ , в связи с чём главные дивизоры образуют подгруппу  $\text{PDiv}(X)$  в группе всех дивизоров  $\text{Div}(X)$ . Факторгруппу  $\text{Div}(X)/\text{PDiv}(X)$  называют *группой классов дивизоров*, и обозначают  $\text{Cl}(X)$ .

<sup>18</sup>насколько редактор понимает

**Пример 14.** Пусть  $X$  — проективная неособая неприводимая кривая. Отображение степени  $\deg : \text{Div}(X) \rightarrow \mathbb{Z}$  пропускается через фактор, так как все главные дивизоры имеют степень 0.

В случае  $X = \mathbb{P}^1$  это оказывается изоморфизмом (то есть  $\deg : \text{Cl}(X) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$ ), что ясно из явного вида нормирований на  $\mathbb{k}(t)$ .

Пусть  $X$  — неособое неприводимое многообразие,  $C \subset X$  — неприводимое подмногообразие коразмерности 1. Можно определить локальное кольцо по отношению к  $C$  (по аналогии с локальным кольцом точки):

$$\mathcal{O}_C \subset \mathbb{k}(X), \quad \mathcal{O}_C = \left\{ \frac{f}{g} \mid g|_C \not\equiv 0 \right\}.$$

Тут мы подразумеваем, что  $g$  не обращается **тождественно** в 0 на  $C$ . Видно, что в случае одноточечного  $C = P$  это определение совпадает с определением локального кольца точки.

Предположим, что  $X$  — аффинное многообразие с аффинной алгеброй  $A = A(X)$ . В этом случае подмногообразие  $C$  соответствует некоторому простому идеалу  $\mathfrak{p} \subset A$  высоты 1. Тогда  $\mathcal{O}_C = A_{\mathfrak{p}}$  (тот факт, что знаменатель не обращается тождественно в 0 на  $C$ , означает как раз, что он не лежит в идеале  $\mathfrak{p}$ ).

Теперь возьмём  $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{m} \subset A$ . Максимальный идеал  $\mathfrak{m}$  соответствует какой-то точке  $C$  и ясно, что  $A_{\mathfrak{p}}$  получается локализацией кольца  $A_{\mathfrak{m}}$ .  $X$  неособое, так что  $A_{\mathfrak{m}}$  регулярно. Идеал  $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{m}}$  — высоты 1. Регулярное локальное кольцо факториально<sup>19</sup>, а в факториальном локальном кольце простой идеал высоты 1 является главным: 1. Значит,  $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{m}}$  — главный идеал, тогда  $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$  — главный, а это говорит нам, что кольцо  $A_{\mathfrak{p}}$  является дискретно нормированным.

Дальше всё некоторое время идёт по аналогии с одномерным случаем кривой.

**Определение 41.** Пусть  $X$  — неособое многообразие. Тогда *группа дивизоров*  $\text{Div}(X)$  — свободная абелева группа, образующими которой являются неособые подмногообразия размерности 1.

Пусть  $D \in \text{Div}(X)$  — дивизор,  $D = \sum_{Z \subset X} n_Z \cdot Z$ . Его *носителем* мы будем называть

$$\text{supp } D = \bigcup_{Z \subset X : n_Z \neq 0} Z.$$

**Определение 42.** Пусть  $f \in \mathbb{k}(X)^*$ . Тогда её *дивизором* мы будем называть

$$\text{div}(f) = \sum_{C \subset X, \text{codim } C=1} v_C(f) \cdot C$$

где сумма идёт по всем неприводимым  $C$ . Дивизоры такого вида мы будем называть *главными*. Нетрудно заметить, что они образуют подгруппу в  $\text{Div}(X)$ , её мы обозначим через  $\text{PDiv}(X)$ .

*Замечание 31.* Это определение корректно, так как для заданной функции  $f \in \mathbb{k}(X)$  существует лишь конечное число неособых неприводимых подмногообразий  $C$  коразмерности таких, что  $v_C(f) > 0$ .

Рассмотрим сначала случай, когда  $X$  аффинно и  $f \in A(X)$ . В таком случае, просто по определению, если  $C$  не является компонентой  $Z(f)$ , то  $v_C(f) = 0$ . Покажем, что таких  $C$ , что  $v_C(f) > 0$  конечное число. Пусть  $C$  соответствует идеалу  $\mathfrak{p}$  высоты 1, тогда

$$v_C(f) > 0 \iff f \in \mathfrak{p}.$$

<sup>19</sup>что мы не доказывали, но обсуждается в 18.

Рассмотрим  $\mathfrak{p}/(f) \subset A/(f)$ . Заметим, что если  $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \trianglelefteq A$ , причём  $f \in \mathfrak{q}, \mathfrak{p}$  и  $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{p}$ , то  $\mathfrak{p}/(f) \neq \mathfrak{q}/(f)$ . Тогда нам достаточно доказать, что в  $A/(f)$  конечное число минимальных простых идеалов (что правда в любом нётеровом кольце).

Если же  $X$  всё еще аффинно, но  $f \in \mathbb{k}(X)$ ,  $f = g/h$ , где  $g, h \in A(X)$ , то мы видим, что  $v_C(f) = v_C(g) - v_C(h)$ , и всё сводится к случаю  $f \in A(X)$ .

В произвольном случае мы покроем  $X = \bigcup U_i$  аффинными (конечным числом) и всякое  $C$  пересекается хоть с одним из  $U_i$ . При этом пересечение имеет ту же размерность, что и  $C$ , так как оно — открытое подмножество  $C$ . Тем самым, дивизор функции опять же определён корректно.

**Определение 43.** Группой классов дивизоров мы будем называть группу  $\text{Cl}(X) = \text{Div}(X) / \text{PDiv}(X)$ .

**Определение 44.** Как и в случае кривых, степенью  $\deg D$  дивизора  $D \in \text{Div}(X)$  называется сумма его кратностей.

**Определение 45.** Пусть  $Z$  — неприводимое неособое подмногообразие в  $X$  коразмерности 1. Тогда ему соответствует дивизор  $1 \cdot Z$ . Простыми мы будем называть дивизоры такого вида.

Пусть  $U \subset X$  — открытое подмножество,  $Z = X \setminus U$ . Можно определить отображение

$$\text{Div}(X) \rightarrow \text{Div}(U).$$

Зададим его на образующих: пусть  $T \subset X$  — простой дивизор, тогда если  $T \cap U = \emptyset$ , отправим его в 0, а если  $T \cap U \neq \emptyset$ , то  $T \cap U$  — простой дивизор в  $U$  и мы отправим  $T$  в  $T \cap U$ . Отметим также, что с главными дивизорами при этом отображении происходит также понятная вещь:

$$\text{div}(f) \mapsto \text{div}(f|_U).$$

Значит, мы получили корректно определённое отображение  $\text{Cl}(X) \rightarrow \text{Cl}(U)$ . Заметим теперь, что так как отображение  $\text{Div}(X) \rightarrow \text{Div}(U)$  сюръективно, отображение  $\text{Cl}(X) \rightarrow \text{Cl}(U)$  также сюръективно. Вычислим его ядро. Предположим, что  $\sum n_i Z_i \in \text{Ker}(\text{Cl}(X) \rightarrow \text{Cl}(U))$ , это означает, что он перешел в  $\text{div}(f)$  для некоторой рациональной  $f \in \mathbb{k}(U)$ . Этую  $f$  можно рассматривать и как элемент  $\mathbb{k}(X)$ , то есть  $\sum n_i Z_i - \text{div}(f) \mapsto 0$  при отображении  $\text{Div}(X) \rightarrow \text{Div}(U)$ . Но, если  $Z_1 \cap U \neq \emptyset, Z_2 \cap U \neq \emptyset$ , и оказалось, что  $Z_1 \cap U \neq Z_2 \cap U$ , то, конечно,  $Z_1 = Z_2$ . Отсюда следует, что ядро состоит из тех неприводимых подмногообразий коразмерности 1, которые не пересекаются с  $U$ . А это в точности неприводимые компоненты  $Z = X \setminus U$  коразмерности 1 (в  $X$ ).

Таким образом,  $\text{Ker}(\text{Cl}(X) \rightarrow \text{Cl}(U)) = \mathbb{Z}^m$ , где  $m$  — количество неприводимых компонент  $Z$  коразмерности 1 в  $X$ . В частности, у нас есть точная последовательность

$$\mathbb{Z}^m \rightarrow \text{Cl}(X) \rightarrow \text{Cl}(U) \rightarrow 0.$$

**Пример 15.** Это наблюдение уже позволяет вычислить группу классов дивизоров для чего-нибудь.

1. Рассмотрим  $X = \mathbb{A}^n$  и простой дивизор  $T \subset X$ . Подмногообразия в  $\mathbb{A}^n$  коразмерности 1 соответствуют простым идеалам высоты 1 в факториальном кольце  $\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ , согласно 1, эти идеалы главные. Таким образом,  $T$  задаётся одним уравнением:  $T = Z(f)$ , но тогда  $T = \text{div}(f)$  и  $T$  главный. Значит, все простые дивизоры главные, откуда следует, что  $\text{Cl}(\mathbb{A}^n) = 0$ .

2. Теперь рассмотрим  $X = \mathbb{P}^n$  и  $U = \mathbb{A}^n$ , Тогда, так как  $X \setminus U = \mathbb{P}^{n-1}$ , мы получаем

$$\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathrm{Cl}\mathbb{P}^n \rightarrow \mathrm{Cl}\mathbb{A}^n \rightarrow 0,$$

а так как левое отображение инъективно (так как дивизор функции не может состоять только из  $\mathbb{P}^n \setminus \mathbb{A}^n$ : на  $\mathbb{A}^n$  регулярная функция без нулей постоянна)

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathrm{Cl}\mathbb{P}^n \rightarrow \underbrace{\mathrm{Cl}\mathbb{A}^n}_{=0} \rightarrow 0,$$

мы имеем  $\mathrm{Cl}\mathbb{P}^n \cong \mathbb{Z}$ .

**Определение 46.** Дивизор называется *эффективным* или *неотрицательным*, если все его кратности неотрицательны. В таком случае мы пишем  $D \geq 0$ .

*Замечание 32.* Заметим, что если  $f$  регулярна, то  $\mathrm{div}(f) \geq 0$ .

Оказывается, верно и обратное.

**Теорема 23.** Пусть  $X$  — неособое многообразие,  $f \in \mathbb{k}(X)$ , причём  $\mathrm{div}(f) \geq 0$ . Тогда  $f$  регулярна на  $X$ .

*Доказательство.* Будем проверять регулярность  $f$  в каждой точке  $X$ . Без потери общности,  $X$  можно заменить на аффинную окрестность, пусть  $A$  — аффинное координатное кольцо  $X$ .

Выберем точку  $P \in X$ , которой соответствует идеал  $\mathfrak{m} \trianglelefteq A$ , и воспользуемся тем, что  $\mathcal{O}_P = A_{\mathfrak{m}}$  факториально. В его поле частных  $f = u \cdot \pi_1^{n_1} \cdots \pi_k^{n_k}$ , где  $u \in \mathcal{O}_P^{\times}$  все  $\pi_i \in \mathcal{O}_P$  неприводимы, а  $n_i \in \mathbb{Z}$ .

Убедимся, что все  $n_j \geq 0$ , зафиксируем некоторый  $j = 1..k$ . Так как  $\pi_j$  — неприводимый элемент  $A_{\mathfrak{m}}$ , то  $(\pi_j)$  — простой идеал высоты 1 в этом кольце. Он соответствует неприводимой компоненте  $X$ , содержащей точку  $P$ . Остальные  $\pi_j'$  соответствуют другим неприводимым компонентам, и при локализации по идеалу  $(\pi_j)$  перейдёт в обратимые элементы. Тем самым,  $v_{Z(\pi_j)}(f) = n_j$ , и так как  $\mathrm{div}(f) \geq 0$ , то  $n_j \geq 0$ .  $\square$

Посчитаем группу классов дивизоров для некоторых произведений. Например,  $\mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1 \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{A}^1$  — открытое подмногообразие. Значит, имеет место точная последовательность  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathrm{Cl}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{A}^1) \rightarrow \mathrm{Cl}(\mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1) \rightarrow 0$ .

Покажем, что левая стрелка всё-таки инъективна. Пусть  $Z = (\mathbb{P}^1 \times \mathbb{A}^1) \setminus (\mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1) = \mathrm{pt} \times \mathbb{A}^1$ , и пусть  $Z \cdot n = \mathrm{div}(f)$  для некоторой  $f \in \mathbb{k}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{A}^1)$ ,  $n \geq 0$ . Тогда  $f$  регулярна (по только что доказанной теореме) на всём  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{A}^1$ .

Пусть  $x \in \mathbb{A}^1$ , положим  $g_x(t) = f(t, x)$ . Это регулярная функция  $\mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{k}$ , значит, она постоянна, то есть  $f(t, x) = h(x)$ . Однако  $f(t, x)|_{\mathrm{pt} \times \mathbb{A}^1} = 0$ , откуда  $h = 0$ . Тем самым,  $\mathrm{Cl}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{A}^1) = \mathbb{Z}$ .

Аналогично можно вложить открыто  $\mathbb{A}^1 \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ . На  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  тоже нет регулярных функций, значит,  $\mathrm{Cl}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ .

## 4.2 Дивизоры форм

Пусть  $X \subset \mathbb{P}^N$  — многообразие,  $F$  — форма (однородный многочлен). Определим дивизор формы  $F$ .

Рассмотрим неприводимое подмногообразие  $C \subset X$  коразмерности 1. Выберем форму  $G$  той же степени, что и  $F$  так, чтобы  $G|_C \neq 0$  (т.е. не обращается в 0 полностью). Рассмотрим функцию  $F/G$  (так как это частное двух форм, это функция) и положим

$$v_C(F) \stackrel{\text{def}}{=} v_C\left(\frac{F}{G}\right).$$

*Замечание 33.* Покажем, что это определение корректно. Возьмём две формы  $G_1$  и  $G_2$ , удовлетворяющие этим условиям, тогда

$$v_C\left(\frac{F}{G_2}\right) = v_C\left(\frac{F}{G_1}\right) + v_C\left(\frac{G_1}{G_2}\right), \text{ но } v_C\left(\frac{G_1}{G_2}\right) = 0,$$

откуда мы получаем нужное.

Определим *дивизор формы*  $F$  как

$$\text{div}(F) = \sum_{C \subset X} v_C(F) \cdot C,$$

где сумма, как и ранее, берётся по всем неприводимым подмногообразиям коразмерности 1. В качестве упражнения читателям остаётся убедиться, что эта сумма финитна, как и раньше.

Пусть теперь  $X$  кривая. Тогда мы можем определить *степень дивизора* формы  $F$  следующим образом:

$$\deg \text{div}(F) = \sum_{C \subset X} v_C(F).$$

Рассмотрим две формы  $F_1, F_2$  такие, что  $\deg F_1 = \deg F_2$ . У нас есть очевидное равенство

$$\text{div}(F_1) = \text{div}(F_2) + \text{div}\left(\frac{F_1}{F_2}\right),$$

и применяя степень мы получаем, что

$$\deg \text{div}(F_1) = \deg \text{div}(F_2).$$

Это позволяет построить отображение  $\mathbb{Z} \rightarrow \text{Cl}(X)$ , отправляющее в  $n \mapsto \text{div}(F)$ , где  $F$  — произвольная форма степени  $n$ . Так как отображение стреляет в  $\text{Cl}(X)$ , то есть дивизоры функций нулевые, это определение корректно.

### 4.3 Дивизоры на эллиптических кривых.

Для иллюстрации вычислим дивизор линейной формы на эллиптической кривой.

Эллиптическая кривая задаётся уравнением

$$y^2 = x^3 + ax + b, \quad a, b \neq 0, \quad 4a^3 + 27b^2 \neq 0.$$

Приравнивая обе производные по  $x$  и по  $y$  к нулю, и решая полученную систему, несложно убедиться, что эта кривая неособая.

Можно рассмотреть точку  $P(x_1, y_1) \in C$  и вычислить локальный параметр для кольца  $\mathcal{O}_P$  (то есть образующую максимального идеала  $\mathfrak{m}_P$ ). Для этого надо рассмотреть следующие два случая<sup>20</sup>

<sup>20</sup>Но вообще данные выкладки нам не пригодятся, будет достаточно лишь то, что локальные кольца регулярны, в чём мы уже убедились, дифференцируя.

1. Пусть  $y_1 \neq 0$ . Тогда покажем, что  $x - x_1$  — локальный параметр для кольца  $\mathcal{O}_P$ . Ясно, что  $\mathfrak{m}_P = (x - x_1, y - y_1)$ . Попробуем получить одну образующую вместо двух.

$$\begin{cases} y^2 = x^3 + ax + b \\ y_1^2 = x_1^3 + ax_1 + b \end{cases} \implies (y - y_1)(y + y_1) = (x - x_1)(x^2 + xx_1 + x_1^2 + a)$$

$$y - y_1 = \frac{(x - x_1)(x^2 + xx_1 + x_1^2 + a)}{y + y_1}.$$

Тогда достаточно показать, что  $y + y_1 \notin \mathfrak{m}_P$ . Действительно, если  $y + y_1 \in \mathfrak{m}_P$ , тогда  $y_1 \in \mathfrak{m}_P$ , а это возможно тогда и только тогда, когда  $y_1 = 0$  (а мы предположили, что это не так).

2. Пусть  $y_1 = 0$ , тогда локальным параметром будет  $y$ .

$$x_1^3 + ax_1 + b = 0 \implies y^2 = (x - x_1)(x^2 + xx_1 + x_1^2 + a) \implies x - x_1 = \frac{y^2}{x^2 + xx_1 + x_1^2 + a}.$$

Покажем, что  $x^2 + xx_1 + x_1^2 + a \notin \mathfrak{m}_P$ .

$$x^2 + xx_1 + x_1^2 + a \equiv 3x_1^2 + a \pmod{\mathfrak{m}_P}.$$

То есть  $3x_1^2 + a = 0$ ,  $y_1 = 0$ . Но это противоречит тому, что точка  $P(x_1, y_1)$  неособая, а именно, тому, что у уравнения  $x^3 + ax + b$  нет кратных корней. В самом деле, если  $3x_1^2 + a = 0$  выполняется вместе с  $x_1^3 + ax_1 + b = 0$ , то есть многочлен зануляется вместе со своей производной, то корень не простой, а с кратностью.

Вычислим степень дивизора линейной формы. Оказывается, что удобнее всего пересекать эллиптическую кривую с бесконечно удалённой прямой, так что проективизируем её. Уравнение проективизации

$$X: \{y^2z = x^3 + axz^2 + bz^3\},$$

и бесконечно удалённая точка соответствует  $z = 0$ . Такая одна — с координатами  $(0 : 1 : 0)$ .

Через эту точку проходит прямая  $z = 0$ , которая и есть та пресловутая бесконечно удалённая прямая. Пересечение с ней всего одно — точка  $P_0$ , и чтобы найти дивизор бесконечно удалённой прямой, надо всего лишь посчитать кратность точки  $P_0$  в этом пересечении.

Будем действовать по определению: чтобы найти дивизор формы, надо превратить эту форму в функцию, деля на другую форму, ненулевую в рассматриваемой точке. В нашем случае, конечно, делить будем на  $y$ . Для вычисления дивизора функции  $\frac{z}{y}$ , поделим уравнение кривой на  $y^3$ , получая

$$\frac{z}{y} = \left(\frac{x}{y}\right)^3 + a\frac{x}{y}\left(\frac{z}{y}\right)^2 + b\left(\frac{z}{y}\right)^3.$$

Обозначим  $x/y = x_1$ ,  $z/y = z_1$ . В них

$$z_1 = x_1^3 + ax_1z_1^2 + bz_1^3,$$

а  $P_0$  имеет координаты  $(0, 0)$ . Производная по  $z_1$  в этой точке ненулевая, то есть, точка неособая (это важно, ведь почти все результаты мы доказывали для неособых кривых).

Локальный параметр здесь —  $x_1$ , так как можно выразить

$$z_1 = \frac{x_1^3}{1 - bz_1^2 - ax_1 z_1}$$

где числитель — единица по модулю  $\mathfrak{m}_{P_0}$ , то есть обратим в  $\mathcal{O}_{P_0}$ .

Итак, функция  $z_1$  имеет кратность 3 в точке  $P_0$ , что и следовало ожидать — уравнение эллиптической кривой имеет степень 3.

Тем самым, дивизор любой другой линейной формы  $F$  на данной кривой будет тоже равен 3. В частности, если прямая  $F = 0$  пересекает эллиптическую кривую в трёх точках, то дивизор соответствующей формы будет просто суммой этих точек — нужно назначить трём точкам положительные целые кратности так, чтобы сумма была равна трём, и науке известен всего один способ сделать это.

#### 4.4 Групповой закон для точек эллиптической кривой

Пусть  $X$  — неособая проективная кривая. Мы знаем, что в этом случае любой главный дивизор имеет степень 0, а значит, мы можем рассмотреть отображение

$$\mathrm{Cl}(X) \xrightarrow{\mathrm{deg}} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

и, обозначая его ядро через  $\mathrm{Cl}^0(X)$  написать короткую точную последовательность

$$0 \rightarrow \mathrm{Cl}^0(X) \rightarrow \mathrm{Cl}(X) \xrightarrow{\mathrm{deg}} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

Пусть  $X \subset \mathbb{P}^2$  — эллиптическая кривая  $y^2z = x^3 + axz^2 + bz^3$ , рассмотрим отображение

$$\varphi: X \rightarrow \mathrm{Cl}^0(X), \quad P \mapsto [P] - [P_0],$$

где  $P_0$  — это бесконечно удалённая точка<sup>21</sup>. Посредством этого отображения хочется определить сложение точек на эллиптической кривой, перенося структуру абелевой группы с  $\mathrm{Cl}^0(X)$  на саму кривую  $X$ . Для этого надо проверить, что  $\varphi$  — биекция.

**Теорема 24.** *Отображение  $\varphi: X \rightarrow \mathrm{Cl}^0(X)$ ,  $P \mapsto [P] - [P_0]$  взаимно однозначно.*

*Доказательство.* Докажем сначала вот такую лемму:

**Лемма 12.** Пусть  $X$  — неособая проективная кривая, на которой есть две различные точки  $P \neq Q$  такие, что  $(P - Q)$  — главный дивизор. Тогда  $X = \mathbb{P}^1$ .

*Доказательство.* Пусть  $P - Q = \mathrm{div}(f)$ . Но тогда  $P = \mathrm{div}(f)_0$ ,  $\mathrm{div}(f)_\infty = Q$ . Рассмотрим отображение  $X \rightarrow \mathbb{P}^1$ , которое даёт нам расширение полей  $t \mapsto f$ ,  $\mathbb{k}(X)/\mathbb{k}(f)$  и при этом  $[\mathbb{k}(X) : \mathbb{k}(f)] = \deg \mathrm{div}(f)_0 = 1$ . Оно влечёт  $\mathbb{k}(X) = \mathbb{k}(f) = \mathbb{k}(t)$ , то есть  $X$  — рациональная кривая.  $\square$

---

<sup>21</sup>Точки в группе классов дивизоров мы вдруг стали брать в квадратные скобки, потому что на самой кривой появилось сложение, и не хочется их перепутать.

Так как мы доказывали, что эллиптическая кривая рационально не изоморфна  $\mathbb{P}^1$ , то отсюда следует инъективность отображения:

**Инъективность.** Предположим, что  $[P] - [P_0] = [Q] - [P_0]$  в  $\text{Cl}^0(X)$ . Тогда  $[P] - [Q] = 0$ , то есть  $P - Q$  — главный дивизор. По доказанной лемме имеет место бирациональный изоморфизм  $X \cong \mathbb{P}^1$  и мы пришли к противоречию.

**Сюръективность.** Рассмотрим  $\sum n_i[P_i] \in \text{Cl}^0(X)$ . Так как сумма коэффициентов равна нулю,

$$\sum n_i[P_i] = \sum n_i([P_i] - [P_0])$$

Будем доказывать, что для любых  $n_i \in \mathbb{Z}$

$$\sum n_i([P_i] - [P_0]) = [S] - [P_0] \in \text{Cl}^0(X) \quad (\text{divisor})$$

для некоторой  $S \in X$ . Сначала покажем, что можно считать, что все  $n_i > 0$ . Пусть некоторый  $n_i < 0$ , то есть в сумму входит  $[P_0] - [P_i]$  с положительным коэффициентом. Проведём вертикальную прямую  $x = \text{const}$  через точку  $P_i$  на эллиптической кривой. Её соответствует форма  $x - \text{const} \cdot z$ , которая пересечёт кривую в точке  $P_i$ , в бесконечно удалённой точке, и ещё в точке, симметричной точке  $P_i$  относительно оси абсцисс, назовём её  $P'_i$ . Получается, в  $\text{Cl}^0(X)$  имеет место равенство

$$[P_i] + [P'_i] + [P_0] = 3[P_0]$$

из которого следует  $[P_0] - [P_i] = [P'_i] - [P_0]$ . Получается, можно привести дивизор (??) к виду, где все  $n_i > 0$ , не меняя при этом сумму модулей  $n_i$ .

Теперь рассмотрим дивизор

$$[P_1] - [P_0] + [P_2] - [P_0] \quad (6)$$

Проведём прямую через точки  $P_1$  и  $P_2$ <sup>22</sup>, то есть найдём форму, обнуляющуюся в этих точках. Её дивизор имеет степень 3, то есть равен  $[P_1] + [P_2] + [P_3]$  для некоторой третьей точки  $P_3 \in X$ . Получается,

$$[P_1] + [P_2] + [P_3] = 3[P_0] \text{ в } \text{Cl}(X),$$

и дивизор  $([P_1] - [P_0]) + ([P_2] - [P_0])$  оказался равен дивизору  $([P_0] - [P_3])$ . С отрицательными кратностями мы уже поборолись раньше. Таким образом, дивизор в конце концов приводится к виду  $[S] - [P_0]$ , чем доказывается сюръективность.  $\square$

Немножко порефлексируем над тем, что мы доказали.

Чтобы сложить две точки  $P, Q \in X$  на эллиптической кривой, мы пишем дивизор  $([P] - [P_0]) + ([Q] - [P_0])$ , и, проводя прямую через  $P$  и  $Q$ , находим точку  $R$ , такую, что дивизор равен  $[P_0] - [R]$ . Дальше  $R$  отражается относительно оси абсцисс, и получается  $[R'] - [P_0]$ .

Тем самым, точки на эллиптической кривой можно складывать так: для точек  $P_1, P_2 \in X$ , рассмотрим прямую, проходящую через них. Эта прямая пересечёт эллиптическую кривую в третьей точке, её мы симметрично отразим относительно оси абсцисс и объявим результатом сложения то, что получилось. Однако проверить ассоциативность данного определения весьма непросто, а наш подход позволяет это увидеть сразу.

<sup>22</sup>В случае  $P_1 = P_2$  подойдёт касательная, но нужны дополнительные слова, почему это так.

*Замечание 34.* Пусть  $U \subset X$  — аффинная часть эллиптической кривой. Имеет место точная последовательность

$$\mathbb{Z} \rightarrow \mathrm{Cl} X \rightarrow \mathrm{Cl} U \rightarrow 0$$

и как мы только что убедились,  $\mathrm{card}(\mathrm{Cl} X) = \mathrm{card}(X) = \mathrm{card}(\mathbb{k})$ . Несложно проверить, что от выкидывания одной точки ничего не поменяется, то есть  $\mathrm{card}(\mathrm{Cl} U) = |\mathbb{k}|$ , а аффинное координатное кольцо  $A(U)$  получилось дедекиндовым кольцом со сколь угодно большой по мощности группой классов. Где вы ещё такое увидите?

## 5 Приложение: альтернативное доказательство того, что степень главного дивизора равна нулю

Данный вариант доказательства был прочитан в следующем семестре, и включён в данный конспект просто по приколу.

### 5.1 План доказательства

Пусть  $X$  — неособая неприводимая проективная кривая,  $f \in \mathbb{k}(X)^*$ , и предположим, что  $f \notin \mathbb{k}$  (случай  $f \in \mathbb{k}$  неинтересен, там  $\text{div}(f) = 0$ ).

Разложим дивизор  $f$  в сумму дивизоров нулей и полюсов:

$$\text{div}(f) = \sum_{P \in X, v_P(x) > 0} v_P(f) \cdot P + \sum_{P \in X, v_P(f) < 0} v_P(f) \cdot P.$$

Пусть  $0 = Q \in \mathbb{P}^1$ , заметим, что  $\{P \in X | v_P(x) > 0\} = \{P \in X | f(x) = 0\} = f^{-1}(Q)$ . Более того, несложно в аналогичных терминах выразить нормирования  $v_P(f)$ . Дело в том, что нормирования  $v_P$  на  $X$  продолжают нормирование  $v_Q$  на  $\mathbb{P}^1$ , о чём немножко говорится здесь 3.4, откуда  $v_P(f) = e(P/Q) \cdot \underbrace{v_Q(t)}_1$ , где  $t \in \mathbb{k}(\mathbb{P}^1)$  — рациональная функция координаты.

В дальнейшем мы стремимся доказать, что

$$\sum_{P \in f^{-1}(Q)} e(P/Q) = [\mathbb{k}(X) : \mathbb{k}(f)].$$

Как только мы это докажем, станет понятно, что дивизор функции — главный, так как слева в равенстве стоит  $\deg \text{div}(f)_0$ . По той же причине окажется, что  $\deg \text{div}(f)_\infty = \deg \text{div}(1/f)_0 = [\mathbb{k}(X) : \mathbb{k}(1/f)] = [\mathbb{k}(X) : \mathbb{k}(f)]$ , а то, что степени дивизоров нулей и полюсов совпадают как раз и является тем, что мы хотим доказать.

### 5.2 Аппроксимационная теорема. Оценка в одну сторону

Пусть  $K$  — поле.

**Определение 47.** Сюръективный гомоморфизм абелевых групп  $v : K^\times \rightarrow \mathbb{Z}$  называют *нормированием* на  $K$ , если  $\forall f, g \in K^\times : v(f + g) \geq \min\{v(f), v(g)\}$ .

Если вдруг оказалось, что  $f + g = 0$ , то нельзя говорить о  $v(f + g)$ ; удобно определить  $v(0) = \infty$ , в таком случае формула останется верной.

**Предложение 28.** Пусть  $f, g \in K, v(f) \neq v(g)$ . Тогда  $v(f + g) = \min\{v(f), v(g)\}$ .

*Доказательство.* Ясно, что  $v(-1) = 0$ , так как  $-1$  имеет конечный порядок в  $K^\times$ , откуда  $\forall h \in K : v(h) = v(-h)$ .

Без потери общности  $v(f) < v(g)$ . Предположим противное:  $v(f + g) > v(f)$ . Запишем  $v(f) = v((f + g) - g) \geq \min\{v(f + g), v(g)\} > v(f)$ , получая противоречие.  $\square$

**Определение 48.** Элемент  $x \in K^\times$  имеет нуль в  $v$ , если  $v(x) > 0$ .

**Определение 49.** Элемент  $x \in K^\times$  имеет полюс в  $v$ , если  $v(x) < 0$ .

**Предложение 29.** Пусть  $K$  — поле, и  $v_1, \dots, v_n$  — различные нормирования на  $K$ . Тогда  $\exists x \in K : x$  имеет нуль в  $v_1$ , и полюса в остальных нормированиях.

*Доказательство.* Пусть сначала  $n = 2$ . Так как нормирования различны, то  $\mathcal{O}_{v_1} \neq \mathcal{O}_{v_2}$ , тем самым,  $\exists y \in \mathcal{O}_{v_1} \setminus \mathcal{O}_{v_2}$ ,  $z \in \mathcal{O}_{v_2} \setminus \mathcal{O}_{v_1}$ . Легко проверить, что  $x := \frac{y}{z}$  подходит.

Теперь докажем общий случай по индукции. Согласно индукционному предположению,  $\exists y, z \in K^\times$  такие, что  $y$  имеет нуль в  $v_1$ , и полюса в  $v_2, \dots, v_{n-1}$ , а  $z$  имеет нуль в  $v_1$ , и полюс в  $v_n$ .

Пусть  $m \in \mathbb{N}$ , утверждается, что  $x := y + z^m$  подойдёт при достаточно больших  $m$ . В самом деле  $v_1(y + z^m) \geq \min\{v_1(y), m \cdot v_1(z)\} > 0$ , и  $v_k(y + z^m) \geq \min\{v_k(y), m \cdot v_k(z)\}$ , причём равенство достигается в случае  $v_k(y) \neq m \cdot v_k(z)$ . Понятно, что при достаточно больших  $m$  будет именно этот случай.  $\square$

**Следствие 14.** Рассмотрим элемент  $z := \frac{1}{1+x^k}$ . Это такой элемент, что  $z$  имеет нуль порядка хотя бы  $k$  в нормированиях  $v_2, \dots, v_n$ , и  $z - 1$  имеет нуль порядка хотя бы  $k$  в  $v_1$ .

**Следствие 15.** Пусть  $a_1, \dots, a_m \in K$ ,  $N \in \mathbb{N}$ . Тогда  $\exists y \in K : v_i(y - a_i) \geq N$ .

*Доказательство.* Для каждого  $i = 1..m$  выберем свой  $z_i$  так, что  $v_i(z_i - 1) \geq N$ , и  $v_j(z_i) \geq N$ .

Теперь  $y := \sum_{i=1}^m a_i z_i$  подойдёт.  $\square$

**Следствие 16** (Аппроксимационная теорема). Пусть  $n_1, \dots, n_m \in \mathbb{Z}$  — целые числа,  $v_1, \dots, v_m$  — различные нормирования на  $K$ . Тогда  $\exists x \in K^\times : v_i(x) = n_i$ .

*Доказательство.* Выберем  $a_i$  так, что  $v_i(a_i) = n_i$ , и применим предыдущее следствие для  $N > n_1, \dots, n_m$ . Так как  $v_i(y - a_i) > v_i(a_i)$ , то согласно 28,  $v_i(a_i) = v_i(y)$ .  $\square$

Пусть  $E/K$  — конечное расширение полей,  $v$  — нормирование на  $K$ ,  $w$  — нормирование на  $E$ .

**Определение 50.** Говорят, что  $w$  продолжает нормирование  $v$ , если существует  $e \in \mathbb{N}$ , называемое индексом ветвления, такое, что  $\forall x \in K^\times : w(x) = e \cdot v(x)$ .

**Теорема 25.** Пусть  $E/K$  — конечное расширение полей,  $v$  — нормирование на  $K$ , нормирования  $w_1, \dots, w_m$  на  $E$  различны и продолжают  $v$ , а соответствующие индексы ветвления равны  $e_1, \dots, e_m$ . Тогда  $e_1 + \dots + e_m \leq [E : K]$ ; в частности, возможных продолжений лишь конечное число.

*Доказательство.* Согласно аппроксимационной теореме, для каждого  $i = 1..m$  можно выбрать  $\pi_i \in E$  так, что  $w_i(\pi_i) = 1$ ,  $w_j(\pi_i) > e_j$ .

Утверждается, что система  $\bigsqcup_{i=1}^m \{\pi_i^1, \dots, \pi_i^{e_i}\}$  из  $e_1 + \dots + e_m$  элементов линейно независима над  $K$ . Ясно, что для доказательства теоремы достаточно это проверить.

Пойдём от противного: пусть есть линейная зависимость вида  $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{e_i} a_{ij} \pi_i^j = 0$ , где  $a_{ij} \in K$  не все равны нулю. Так как  $a_{ij}$  можно одновременно домножать на любой элемент поля, то можно считать, что все ненулевые  $a_{ij}$  таковы, что  $v(a_{ij}) \geq 0$ , причём (без потери общности)  $w(a_{1t}) = 0$ , и  $t$  выбрано минимально возможным.

Перенося  $a_{1t}e_1^t$  в правую часть равенства, получаем

$$\sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^{e_i} a_{ij} \pi_i^j + \sum_{\substack{j=1..e_1 \\ j \neq t}} a_{1j} e_1^j = a_{1t} e_1^t$$

Применяя  $w_1$  к данному равенству, получаем противоречие — нормирование правой части равно  $w_1(e_1^t) = t$ , а нормирование суммы в левой части не меньше минимума нормирований слагаемых. Для  $i > 1$ :  $w_1(a_{ij} \pi_i^j) \geq j w_1(\pi_i) > e_1$ , а для  $i = 1$  пишется следующая оценка:

$$w_1(a_{1j} \pi_1^j) = e_1 \cdot v(a_{1j}) + j \cdot \underbrace{w_1(\pi_1)}_1,$$

что при  $j < t$  хотя бы  $e_1 + j > e_1 \geq t$ , а при  $j > t$  — хотя бы  $j > t$ .  $\square$

**Следствие 17.** В ситуации вложения полей, осуществляемого рациональной функцией  $f$ , получается

$$\sum_{P \in f^{-1}(Q)} e(P/Q) \leq [\mathbb{k}(X) : \mathbb{k}(f)],$$

так как ясно, что нормирования, отвечающие различным точкам  $X$ , различны.

### 5.3 Пространство функций, ассоциированное с дивизором. Оценка в другую сторону

Пусть  $D \in \text{Div}(X)$  — произвольный дивизор на проективной неособой неприводимой кривой  $X$ .

**Определение 51.** Говорят, что  $D$  неотрицательный, если он имеет вид  $\sum_P n_P \cdot P$  для некоторых  $n_P \geq 0$ . Пишут  $D \geq 0$ .

Введём пространство функций, ассоциированное с дивизором

$$\mathcal{L}(D) \stackrel{\text{def}}{=} \{f \in \mathbb{k}(X)^\times \mid \text{div}(f) + D \geq 0\} \cup \{0\}.$$

Несложно проверить, что  $\mathcal{L}(D)$  замкнуто относительно сложения и умножения на скаляр из  $\mathbb{k}$ . В самом деле, если  $f, g \in \mathcal{L}(D)$ , то проверка того, что  $f + g \in \mathcal{L}(D)$ , поточечна:

$$\forall P \in X : \begin{cases} v_P(f) + n_P \geq 0 \\ v_P(g) + n_P \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \min\{v_P(f), v_P(g)\} + n_P \geq 0.$$

**Теорема 26.** Пространство  $\mathcal{L}(D)$  конечномерно над  $\mathbb{k}$ . Обозначим  $l(D) := \dim_{\mathbb{k}} \mathcal{L}(D) < \infty$ . Помимо этого, утверждается, что  $l(D) \leq \deg D + 1$ , если  $D \geq 0$ .

*Доказательство.* Без потери общности  $D \geq 0$  — в противном случае надо доказать лишь конечномерность, и понятно, что  $\mathcal{L}(D) \subset \mathcal{L}(D_+)$ <sup>23</sup>, так что можно заменить  $D$  на  $D_+$ .

<sup>23</sup>Пусть  $D = \sum n_P \cdot P$ , тогда  $D_+ \stackrel{\text{def}}{=} \sum \max\{n_P, 0\} \cdot P$ .

Будем действовать по индукции по  $\deg D$ . База — нулевой дивизор  $D = 0$ . В таком случае  $\mathcal{L}(D)$  — регулярные везде на  $X$  функции. Согласно 7, это только константы, откуда действительно  $l(D) = 1 \leq \deg D + 1$ .

Теперь совершим переход.  $D \neq 0$ , значит, существует точка  $x \in \text{supp } D \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X \mid n_x \neq 0\}$ . Можно записать  $D = r \cdot x + D_1$ , где  $x \notin \text{supp } D_1$ ; обозначим  $D' = (r - 1) \cdot x + D_1$ . Пусть  $t$  — локальный параметр в точке  $x$ , то есть  $\mathfrak{m}_x = (t)$ .

Устроим линейное отображение  $\mathcal{L}(D) \rightarrow \mathbb{k}, f \mapsto (t^r f)(x)$ . Не факт, что оно сюръективно, но определено оно корректно, и его ядро равно  $\mathcal{L}(D')$ . По индукционному предположению  $\dim \mathcal{L}(D') \leq \deg D$ , и по теореме о размерности ядра и образа всё получается.  $\square$

*Замечание 35.* Предположим, что равенство  $\deg \text{div}(f)_0 = [\mathbb{k}(X) : \mathbb{k}(f)]$  уже доказано. Рассмотрим точку  $x \in X$ , и соответствующий ей дивизор  $D = x$ .

Выберем  $f \in \mathcal{L}(D)$  так, что  $f \notin \mathbb{k}$ . Если такая  $f$  нашлась, то  $\deg \text{div}(f)_\infty = 1$ , откуда  $[\mathbb{k}(X) : \mathbb{k}(1/f)] = 1$ . Иными словами,  $\mathbb{k}(X) = \mathbb{k}(1/f)$ , или  $\mathbb{k}(X)$  — чисто трансцендентное расширение  $X$ , значит, кривая  $X$  рациональна.

Но есть и нерациональные кривые, и для них получается, что  $l(D) = 1$  при одноточечном  $D = x$ . Просматривая доказательство, видно, что в случае нерациональной кривой утверждение можно усилить:  $l(D) \leq \max\{\deg D, 1\}$ .

Итак, пусть  $f \in \mathbb{k}(X), f \notin \mathbb{k}$ . Обозначим  $n := [\mathbb{k}(X) : \mathbb{k}(f)]$ , и выберем базис  $\mathbb{k}(X)$  над  $\mathbb{k}(f)$ , пусть он называется  $z_1, \dots, z_n$ . Расширение  $[\mathbb{k}(X) : \mathbb{k}(f)]$  алгебраично, откуда все  $z_i$  алгебраичны над  $\mathbb{k}(f)$ . Домножая их на подходящий элемент  $\mathbb{k}(f)$ , можем считать, что все  $z_i$  целы над  $\mathbb{k}[f]$ , то есть каждый  $z_i$  удовлетворяет полиномиальному уравнению вида

$$z_i^m + a_i \cdot z_i^{m-1} + \dots + a_0 = 0, \quad a_i \in \mathbb{k}[f].$$

Пусть в точке  $P \in X$ :  $\text{div}(z_i)$  имеет отрицательный коэффициент, то есть  $v_P(z_i) < 0$ . Предположение  $v_P(f) \geq 0$  влечёт противоречие, так как в этом случае  $v_P(a_i) \geq 0$ , и  $v_P$  выдаёт разные результаты на левой и правой частях равенства  $-z_i^m = a_i \cdot z_i^{m-1} + \dots + a_0$ . Тем самым,  $v_P(f) < 0$ , и из финитности дивизора:  $\exists N \in \mathbb{N} : \forall M > N : \text{div}(z_i) + M \cdot \text{div}(f)_\infty \geq 0$ . Этую константу  $N$  можно выбрать универсально одной для всех  $z_i$ .

Осталось заметить, что  $\bigsqcup_{i=1}^n \{z_i \cdot f^s\}_{s=1}^{M-N} \subset \mathcal{L}(M \cdot \text{div}(f)_\infty)$ . Все эти функции внутри  $\mathbb{k}(X)$  являются  $\mathbb{k}$ -линейно независимыми, так как степени  $f^s$  независимы внутри  $\mathbb{k}[f]$ , а  $z_i$  — базис  $\mathbb{k}(f)$ -векторного пространства.

В силу только что доказанной теоремы 26,  $(M - N) \cdot n \leq M \cdot \deg \text{div}(f)_\infty$ . Деля на  $M$ , и устремляя его к бесконечности, мы получаем искомое  $n \leq \deg \text{div}(f)_\infty$ .

## 6 Приложение: компендиум по коммутативной алгебре

В данном приложении собраны некоторые утверждения из коммутативной алгебры, на которые опирался курс.

### Лемма Накаямы

**Теорема 27** (Лемма Накаямы). *Пусть  $M$  — конечно порождённый  $R$ -модуль,  $I \trianglelefteq R$  — идеал. Предположим, что  $M = IM$ . Тогда  $\exists a \in I : \forall m \in M \ am = m$*

*Доказательство.*  $\text{id}_M(M) = IM \implies$ , а значит, по теореме Гамильтона-Кэли  $\exists p(t) = t^n + \alpha_{n-1}t^{n-1} + \dots + \alpha_0, \alpha_i \in I : p(\text{id}_M) = 0$ . Тогда

$$\text{id}_M(1 + \alpha_{n-1} + \dots + \alpha_0) = 0 \implies \text{id}_M(-( \alpha_{n-1} + \dots + \alpha_0)) = 1.$$

Тогда  $a = -( \alpha_{n-1} + \dots + \alpha_0)$  подходит. В самом деле,

$$am = \text{id}_M(m) = m \quad \forall m \in M.$$

□

**Предложение 30.** *В частности, если  $A$  — локальное кольцо,  $\mathfrak{m} \trianglelefteq A$  — максимальный идеал, а  $M$  — конечно порождённый  $A$ -модуль, то  $\mathfrak{m}M = M \iff M = 0$ .*

*Доказательство.* Помимо того, что это прямое следствие предыдущего (с одной стороны, в локальном кольце  $a = 1$  обратимо, с другой стороны  $\forall m \in M : (a - 1)m = 0$ ), это можно доказывать и независимо.

А именно, пусть  $M = \text{span}\{m_1, \dots, m_k\}$ , где  $k$  выбрано наименьшим. Согласно посылке предложения,  $m_1 \in \mathfrak{m} \cdot \text{span}\{m_1, \dots, m_k\}$ , то есть  $m_1 = \sum_{i=1}^k m_i \alpha_i$ , где  $\alpha_i \in \mathfrak{m}$ . Отсюда  $m_1(1 - \alpha_1) = \sum_{i=2}^k m_i \alpha_i$ , и сокращая на  $1 - \alpha_1$ , получаем, что систему образующих модуля можно уменьшить.

□

**Предложение 31.** *Пусть  $A$  — локальное кольцо,  $\mathfrak{m} \trianglelefteq A$  — максимальный идеал, и имеется набор  $x_i \in \mathfrak{m}$  таких, что  $(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_k}) = \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ . Тогда  $(x_1, \dots, x_k) = \mathfrak{m}$ .*

*Доказательство.* Рассмотрим модуль  $M = \mathfrak{m}/(x_1, \dots, x_k)$ . По лемме Накаямы

$$M = 0 \iff \mathfrak{m}M = M \iff \mathfrak{m}^2 + (x_1, \dots, x_k) = \mathfrak{m},$$

что как равносильно тому, что  $(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_k}) = \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ . □

### Теорема о подъеме и теорема о спуске

**Теорема 28** (О спуске). *Пусть  $A \subset B$  — целостные, включение — целое расширение колец, и  $A$  — целозамкнуто. Пусть  $\mathfrak{q}_m \in \text{Spec } B$ ,  $\mathfrak{p}_m \in \text{Spec } A$  — простые, причём  $q_m \cap A = p_m$ . Тогда для любой цепочки простых идеалов*

$$\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{p}_m \subset A$$

*существует цепочка простых идеалов*

$$\mathfrak{q}_0 \subset \mathfrak{q}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{q}_m \subset B : \mathfrak{q}_i \cap A = \mathfrak{p}_i.$$

## Целые и конечные расширения

**Теорема 29.** Пусть  $R \subset A$  — целое (конечное) включение колец, и  $\varphi : R \rightarrow B$  — гомоморфизм колец. Тогда  $B \rightarrow A \otimes_R B$  — тоже целое (конечное) включение колец.

- В частности, для всякой мультипликативной системы  $S \subset A$ :  $S^{-1}R \subset S^{-1}A$  цело (конечно).
- В частности, для всякого идеала  $I \trianglelefteq R$ : гомоморфизм  $R/I \rightarrow A/IA$  цел (конечен)<sup>24</sup>.
- Как следствие предыдущего, для всякого идеала  $I \trianglelefteq A$ :  $R/(I \cap R) \subset A/I$  цело (конечно).

**Теорема 30.** Пусть  $R \subset A$  — целое (конечное) включение областей целостности. Тогда  $R$  поле если и только если  $A$  — поле.

**Теорема 31** (Лемма Нётер о нормализации). Пусть  $B$  — конечно-порожденная  $\mathbb{k}$ -алгебра. Тогда  $B$  — конечное расширение кольца многочленов  $\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$  для некоторого  $n$ .

**Теорема 32** (Сохранение размерности при целом расширении). Пусть  $A \subset B$  — целое включение колец. Тогда  $\dim A = \dim B$ .

## Теорема Гильберта о нулях

**Теорема 33** (Теорема Гильберта о нулях, (strong) nullstellensatz). Пусть  $\mathbb{k} = \mathbb{k}^{alg}$ ,  $I \trianglelefteq F[t_1, \dots, t_n]$ ,  $a f \in \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ . Тогда  $f(Z(I)) = 0 \Leftrightarrow f \in \sqrt{I}$ . Иными словами,  $I(Z(I)) = \sqrt{I}$ .

**Теорема 34** (Слабая теорема Гильберта о нулях, weak nullstellensatz). Пусть  $\mathbb{k} = \mathbb{k}^{alg}$ ,  $\mathfrak{m} \trianglelefteq F[t_1, \dots, t_n]$  — максимальный идеал. Тогда  $\exists a_1, \dots, a_n \in \mathbb{k} : \mathfrak{m} = (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$ .

## Теория размерности.

**Теорема 35** (Теорема Крулля о главных идеалах, hauptidealsatz). Пусть  $A$  — нётерово кольцо, а  $f \in A$  — элемент, не являющийся ни делителем нуля, ни обратимым. Тогда высота каждого минимального простого идеала  $\mathfrak{p}$ , содержащего  $f$  равна 1. Т.е.

$$\forall \mathfrak{p} \in \text{Spec } A : (f) \subset \mathfrak{p} \quad \text{ht } \mathfrak{p} = 1.$$

---

<sup>24</sup>В данном случае гомоморфизм  $R/I \rightarrow A/IA$  не обязан быть инъективным, поэтому включение внезапно поменялось на морфизм. Суть та же —  $A/IA$  будет цело (конечно) над образом  $R/I$  внутри себя.